THALES

Maurice Fréchet: Les mathématiques, l'abstrait et le concret

Le cours de Fréchet à l'IHP pendant l'hiver 1939, borne de Fréchet-Darmois, densités distinguées et géométrie de l'information

Frédéric BARBARESCO
THALES

Le cours de Maurice Fréchet à l'IHP pendant l'hiver 1939, borne de Fréchet-Darmois, densités distinguées et géométrie de l'information

- En 1943, deux ans avant C. R. Rao, Maurice Fréchet publie un article faisant référence à son cours pendant l'hiver 1939 à l'IHP, dans lequel il introduit la borne qui a été improprement appelée par la suite borne de Cramer-Rao. L'article traite du cas à une variable, mais son collègue Georges Darmois publie la version à plusieurs variables en 1945. Il serait donc plus juste d'appeler cette borne la borne de Fréchet-Darmois. Au-delà de la découverte de cette borne, Fréchet a également étudié les "densités distinguées" (cas où la borne est atteinte), en vérifiant les relations liées à la transformée de Clairaut-Legendre. Cette transformée de Clairaut-Legendre constitue un des fondements de la structure fondamentale de l'actuelle "géométrie de l'information", dont Fréchet a entrouvert la porte, en montrant que l'inverse de la matrice de Fisher est la hessienne d'une fonction. Ces résultats n'ont été stabilisés mathématiquement que dans les années 1950 par Jean-Louis Koszul, doctorant d'Henri Cartan, étudiant la géométrie des cônes convexes saillants associés à des domaines bornés symétriques homogènes, développant ainsi l'idée séminale d'Elie Cartan.

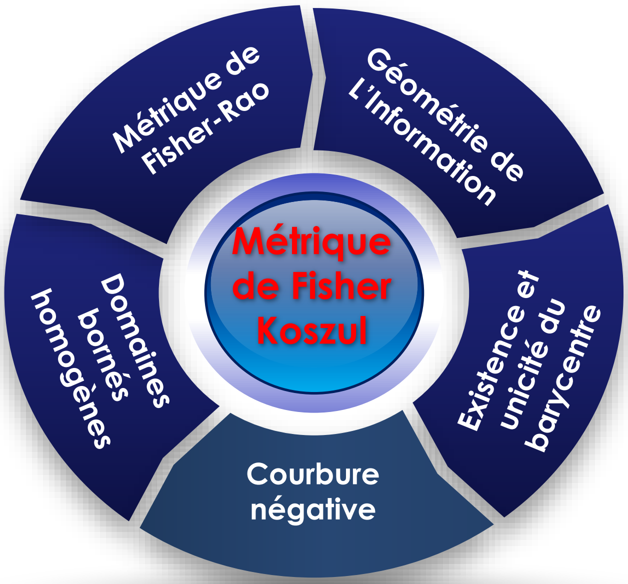
Maurice Fréchet's Winter 1939 IHP lecture, Fréchet-Darmois bound, distinguished densities and Information Geometry

- In 1943, two years before C. R. Rao, Maurice Fréchet published a paper making reference to his 1939 winter IHP lecture, in which he introduced the bound which was improperly named Cramer-Rao bound. The paper deals with the monovariate case, but his colleague Georges Darmois published the multivariate version in 1945. It would therefore be more accurate to name this bound the Fréchet-Darmois bound. Beyond the discovery of this bound, Fréchet studied also "distinguished densities" (case where the bound is reached), verifying relations related to Clairaut-Legendre transform. This Clairaut-Legendre transform constitutes a bedrock of the nowadays "Information Geometry" fundamental structure, of which Fréchet half-opened the door, by showing that the inverse of the Fisher matrix is the Hessian of a function. These results were only recovered mathematically during the 1950s by Jean-Louis Koszul, PhD student of Henri Cartan, studying geometry of sharp convex cones associated to homogeneous symmetric bounded domains, developing seminal idea of Elie Cartan.

https://archive.org/details/ENS01_PHOD_2_1900_2

Les éléments aléatoires de nature quelconque dans un espace distancié

Les éléments aléatoires de nature quelconque dans un espace distancié

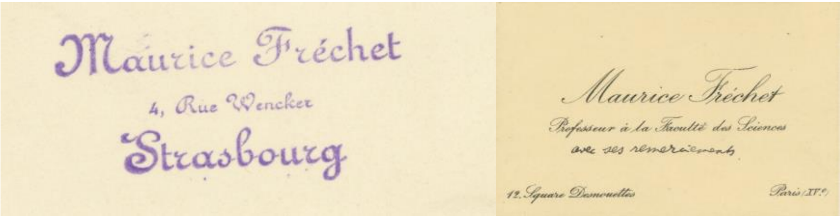


TRANSPORT OPTIMAL

GEOMETRIE DE L'INFORMATION

Plan de l’exposé

- Maurice Fréchet de 1930 à 1949 et contacts avec C.R. Rao & R. Fisher
- Les éléments aléatoires de nature quelconque dans un espace distancié
- Transport Optimal: Distance de Fréchet-Levy versus distance de Wasserstein (4ème distance oubliée)
- Géométrie de l’Information et la borne de Fréchet-Darmois
- Les densités distinguées de Maurice Fréchet et l’équation d’Alexis Clairaut (papier de 1943) et ses liens avec la géométrie de l’information
- La Géométrie de l’Information au XXIème siècle



Maurice Fréchet de 1930 à 1949 et contacts avec C.R. Rao & R. Fisher

Borne de Fréchet-Darmois-Cramer-Rao

1. INTRODUCTION

The Cramér–Rao inequality, which provides, under certain regularity conditions, a lower bound for the variance of an estimator, is well known to statisticians from the theory of estimation. Savage (1954, p. 238) has recommended the name "information inequality" since results on the inequality were given by Fréchet (1943) and Darmois (1945), as well as by Rao (1945) and Cramér (1946a, 1946b). Various extensions have been made by Barankin (1949, 1951), Bhattacharyya (1946b, 1947, 1948), Chapman and Robbins (1951), Chernoff (1956, with an acknowledgment to Charles Stein and Herman Rubin), Fraser and Guttman (1952), Kiefer (1952), Seth (1949), Wolfowitz (1947).

We shall derive in theorem 2.1 an inequality for the discrimination information that may be considered a generalization of the Cramér–Rao or information inequality (using the name recommended by Savage). [Cf. Kullback (1954).] Theorem 2.1 will play an important part in subsequent applications to testing statistical hypotheses. We relate theorem 2.1 (and its consequences) and the classical information inequality of the theory of estimation in sections 5 and 6.

There is a sizeable literature on lower bounds for risks of estimates. The Cramér-Rao bound was proposed independently by Cramér [1946] and Rao [1945]. It had been obtained earlier by Fréchet [1943] and Darmois [1945]. In our account it follows from considerations that involve only a pair of values of the parameter points. For a formulation that uses weak derivatives instead of strong ones, see Fabian and Hannan [1977]. It should be mentioned that Barankin [1949] gave a very general formulation using the Riesz, or Hahn-Banach evaluation of norms for linear functionals.

In order to simplify the derivations, we assume throughout the survey that $\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}_0)$ is invertible. The CRB was first published by Frechet [60] and later by Darmois [30], Cramér [27], and Rao [119]. Using (2.3)

Maurice Fréchet, papier de 1943 et cours de l’IHP de l’Hiver 1939

M. Fréchet, Sur l'extension de certaines evaluations statistiques au cas de petits échantillons, Revue de l'Institut International de Statistique, Vol. 11, No. 3/4 (1943), pp. 182-205

SUR L'EXTENSION DE CERTAINES EVALUATIONS STATISTIQUES AU CAS DE PETITS ECHANTILLONS

par Maurice Fréchet.

Introduction.

Ce mémoire [1]) est consacré à l'extension au cas de petits échantillons de la méthode de détermination empirique d'un paramètre basée sur le principe de la moindre dispersion et à sa comparaison avec les méthodes basées sur le principe de la valeur dominante et sur celui de la plus grande plausibilité.

Si nous nous en étions tenus aux démonstrations, nous aurions pu abréger sensiblement ce mémoire. Mais il nous a paru nécessaire d'entrer dans plus de détails qu'on ne le fait généralement, afin de séparer plus nettement des déductions mathématiques, les hypothèses et les conventions sur lesquelles elles reposent et dont le choix, aussi plausible que possible, n'a cependant rien de nécessaire.

Notations. — Soient X_1, X_2, ... X_n, n valeurs prises par une variable aléatoire X au cours de n épreuves indépendantes. On se limitera, dans la suite, au cas où la loi de répartition de X peut s'exprimer par une probabilité élémentaire $\delta\, dx$ et où, de plus, la densité de probabilité δ en un point x est une fonction d'une forme connue $f(x, \theta)$, dépendant d'un paramètre dont la valeur vraie θ_0 est inconnue.

On se propose d'évaluer θ_0 connaissant d'une part, la forme $f(x, \theta)$ de δ et, d'autre part, les résultats de n épreuves qui ont donné les valeurs numériques x_1, x_2, ... x_n à X_1, X_2, ... X_n. Sous cette forme stricte, le problème *ne peut être résolu* par de simples déductions mathématiques.

Il s'agit donc de fixer *certaines conventions plausibles* qui assigneront à tout „échantillon" de n valeurs x_1, x_2, ... x_n de X une valeur déterminée t, laquelle sera prise comme valeur empirique de la valeur vraie θ_0. t est donc une certaine fonction convenablement choisie de x_1, x_2, ... x_n

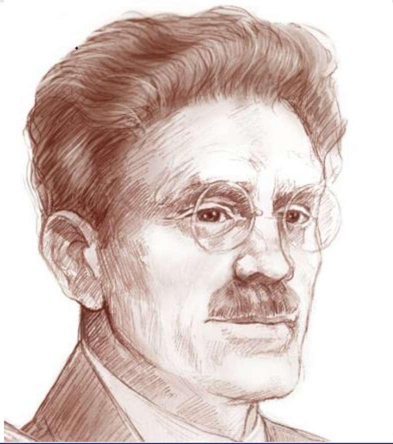
$$t = H_n(x_1, \ldots, x_n). \tag{1}$$

On voit que chaque échantillon détermine t, de sorte que

$$T_n = H_n(X_1, \ldots, X_n) \tag{2}$$

est une variable aléatoire dont chaque échantillon détermine une valeur. (Quand, dans nos raisonnements, n sera fixe, nous écrirons, pour simplifier, H au lieu de H_n et T au lieu de T_n).

[1]) Le contenu de ce mémoire a formé une partie de notre cours de statistique mathématique à l'Institut Henri Poincaré pendant l'hiver 1939—1940. Il constitue l'un des chapitres du deuxième cahier (en préparation) de nos „Leçons de Statistique Mathématique", dont le premier cahier „Introduction: Exposé préliminaire de Calcul des Probabilités" (119 pages in-quarto, dactylographiées) vient de paraitre au „Centre de Documentation Universitaire", Tournois et Constans, Paris.



Manuscrit perdu du cours de statistique mathématique à l’Institut Henri Poincaré pendant l’Hiver 1939-1940 !

[1]) Le contenu de ce mémoire a formé une partie de notre cours de statistique mathématique à l'Institut Henri Poincaré pendant l'hiver 1939—1940. Il constitue l'un des chapitres du deuxième cahier (en préparation) de nos „Leçons de Statistique Mathématique", dont le premier cahier „Introduction: Exposé préliminaire de Calcul des Probabilités" (119 pages in-quarto, dactylographiées) vient de paraitre au „Centre de Documentation Universitaire", Tournois et Constans, Paris.

https://www.jstor.org/stable/1401114

Œuvre M. Fréchet : centre Emile Borel, Institut Henri Poincaré
Absence du cours de l'Hiver 1939

Georges Darmois, papier de 1945 (la version multivariée)

G. Darmois, « Sur les limites de la dispersion de certaines estimations », Revue de l'Institut International de Statistique, Vol. 13, No. 1/4 (1945), pp. 9-15

SUR LES LIMITES
DE LA DISPERSION DE CERTAINES ESTIMATIONS

par G. Darmois

Dans un mémoire intitulé: „Sur l'extension de certaines évaluations statistiques au cas de petits échantillons"[1]), M. Maurice Fréchet a étudié l'estimation, sur des échantillons de taille quelconque, du paramètre unique Θ d'une loi de probabilité. La variable aléatoire H_n $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ qui doit fournir une estimation de Θ, connaissant l'échantillon $x_1, x_2, \ldots x_n$, est assujettie à la condition que son espérance mathématique soit égale à l'inconnue Θ (ou à une condition plus générale, que la différence $E(H_n) - \Theta$ soit infiniment petite avec $\frac{1}{n}$).

Les résultats du mémoire de M. Fréchet peuvent être étendus à un nombre quelconque de paramètres, et certains d'entre eux au cas où l'échantillon est constitué par des résultats d'épreuves non indépendantes.

Nous ferons sur les lois de probabilité utilisées les mêmes hypothèses, relatives à l'existence des moments du second ordre, et à la possibilité d'appliquer la règle de dérivation d'une intégrale par rapport à un paramètre.

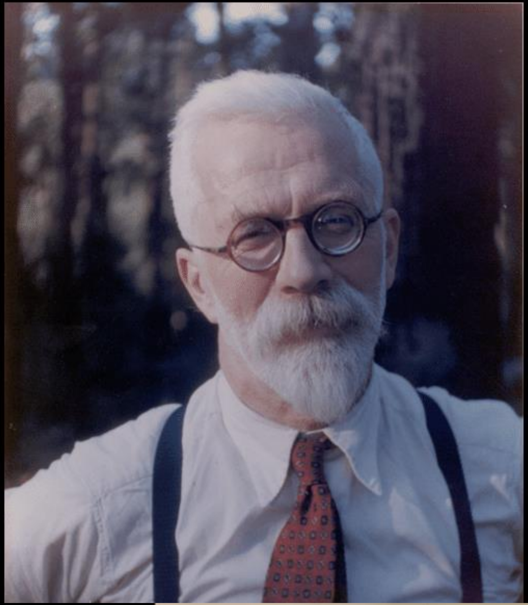
Densités minimisantes, distinguées et quasi-distinguées. — M. Fréchet désigne ainsi les densités de probabilité telles que, *en supposant les épreuves indépendantes*, l'inégalité (3) devienne une égalité.

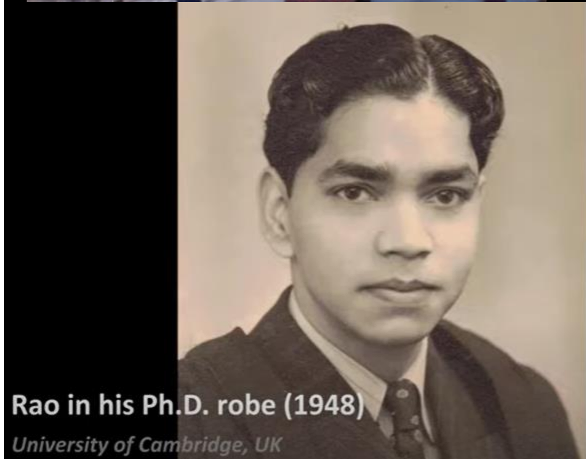
Correspondance Maurice Fréchet/Ronald Fisher

- R. Fisher: Correspondance avec R.M. Frechet (Institut Henri Poincaré)

https://digital.library.adelaide.edu.au/dspace/handle/2440/67683

- Comme indiqué par M. Armatte, il existe une importante correspondance entre R. Fisher et M. Fréchet qui couvre la période août 1939-avril 1940.
- Mission en Angleterre de Fréchet de la fin du mois de janvier au mois de février 1940.
- Thèse de C.R. Rao encadré par R. Fisher, soutenue en 1948





Correspondance Maurice Fréchet/Ronald Fisher

M. Fréchet to Fisher: 20 *February* 1940

When you pointed my attention on the lines of your first paper on fiducial statem. where you state that T is not fixed, I noted this fact. I have not seen a similar warning in the paper which I quoted from *Annals of Eugenics*, 'On the fiducial arg.'. But since you say that when you wrote that second paper, you intended to mean that in the fiducial probability, $\bar{x}$, s as well as μ were not fixed, I have to admit that you know better than I do what you intended to mean.

Thereupon my question remains: on which ground are identified (or rather equalized) the two concerned probabilities referring to the same event (one particular inequality) but two different populations:

	Paper on inverse probability	Paper on the fiducial argument
1st population	T random, θ fixed	$x_1, \ldots x_n$ random, μ fixed
2nd population	T and θ random	$x_1, \ldots x_n$ and μ random

I mean, are those two probabilities equalized:

because it is obvious to you that they are equal?
or because it is a logical deduction of classical principles of Cal. of Prob., and then how?,
or because of the admission of a new principle and then which one?
or etc?

I thank you for the historical information which you gave me.

P.S. Trying to extend to small samples the second theorem of your paper: the logic of inductive inference, I find that in order that the estimate $T = H(X_1, \ldots X_n)$ which gives $1/(nV) = i$, should come from a function $H(x_1, \ldots x_n)$ independent of θ, it is necessary that f should be of a special form

$$f(x,\theta) = \exp\{\mu_0'(h(x)-\theta) + \mu(\theta) + g(x)\}$$

[with] μ, g, h arbitrary as long as they are such that $\int_{-\infty}^{+\infty} f\,dx = 1$. And then $T = \Sigma h(X_i)/n$. Among these functions f is for instance:

$$f(x,\theta) = (1/\sigma\sqrt{2\pi})\exp\{-(x-\theta)^2/(2\sigma^2)\},$$

more generally, $f(x,\theta) = (1/\sigma\sqrt{2\pi})\,h'(x)\exp\{-(h(x)-\theta)^2/(2\sigma^2)\}$ and so on. (It had seemed necessary to admit that $H(x_1, \ldots x_n)$ be independent of θ, to get a rational theory of estimates).

Fisher to M. Fréchet: 26 *February* 1940

Thanks for your note of February 20th. I think logically the fiducial argument proceeds in three stages, setting aside for the moment my usual cautions about using the whole of the information.

1) A continuous distribution is found for T for samples of a given size drawn from a population having parameter θ. θ is then also a parameter of this distribution of T.

2) A relation is established between the true value and any percentile point T_p of the distribution of T. We shall suppose that this also establishes a univalent inverse relationship from which, given T_p, θ may be found. It is then true for all samples of the given size (or otherwise specified by ancillary statistics) that the inequality T exceeds θ will occur with given frequency when T and θ are mutually related as defined above.

3) In these circumstances *I think it proper* to refer to p as the fiducial probability that θ is less than T. This as it stands is a definition of the phrase *fiducial probability*. I believe it is, properly speaking, a probability, measuring as it does the relative frequency of one out of two or more well defined outcomes of a well defined procedure. I think it may be described properly as the admission of a new principle, if this phrase means, as I suppose it does, the thinking of a given situation in an unfamiliar way. Alternatively, I have no objection to regarding stages 1) and 2) as logical deductions, and 3) as an arbitrary definition. The definition is, however, a matter of choice and not a matter of chance.

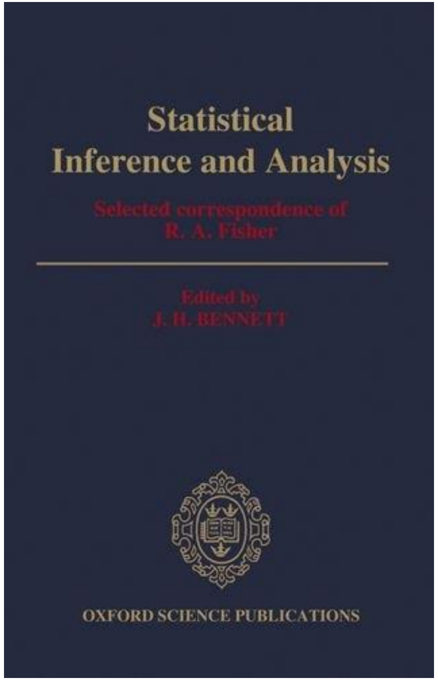
The outstanding difference from inverse probability lies in the population of events of which the particular one, to which the probability refers, is regarded as a member. In the case of inverse probability this population is that of all samples of a given size, selected to have a given value for the estimate T, drawn by chance from a population which has itself been drawn by chance from a super-population having a given specification in respect of the distribution of the parameter θ.

The population of events referred to in fiducial probability consists of all samples of a given size drawn from any population defined by some value or other, θ. It is obvious that the frequency of a given event in members of this last population may be unequal to the frequency of the same event in the population considered in the theory of inverse probability.

I hope this will do something to clear up this knotty problem.

Familles exponentielles

https://digital.library.adelaide.edu.au/dspace/bitstream/2440/10702/6/fras_fre.pdf



THALES

Correspondance Georges Darmois/Ronald Fisher

G. Darmois to Fisher: 20 *August* 1940

Je vous envoie quelques remarques sur le problème du Nil et les résumés exhaustifs. Ce que je dis aux pages 1 et 2 est fait depuis assez longtemps, j'y avais réfléchi après votre passage à Paris et votre Conférence à la Société de Biotypologie [*CP* 156]. Le reste provient de la lecture des pages que vous m'avez envoyées. . . .

[Enclosure]

Problème du Nil — Résumés exhaustifs

Le problème du Nil se pose pour une loi de probabilité à deux (ou plusieurs) variables, dépendant d'un (ou plusieurs) paramètres. Soit, pour fixer les idées $f(xy,\theta)\, d(xy)$. Il faut voir si une fonction convenablement choisie $X(xy)$ a une loi de probabilité indépendante de θ. Bien entendu, on peut construire tout de suite toutes les lois ayant cette propriété. Il suffit de prendre

$$A(X)\mathrm{d}X\, B_X(Y,\theta)\mathrm{d}Y$$

$A(X)$ étant la diversité de probabilité marginale de X, indépendante de θ, $B_X(Y,\theta)$ est une fonction de X, Y, θ, qui est la densité de probabilité liée de Y quand X est fixé. Ces deux fonctions peuvent être les plus générales de leur définition. Il suffit ensuite de remplacer X par une fonction arbitraire de xy, et de remplacer Y par y. Dans ces conditions, les courbes $X(xy) = \mathrm{C^{te}}$ limitent des aires où la probabilité totale est indépendante de θ.

Si l'on envisage l'information qu'une telle loi de probabilité peut apporter, relativement au paramètre θ, on sait qu'on peut le représenter par:

$$i = E\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log f\right\}^2 = -E\left\{\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log f\right\}.$$

D'autre part un théorème général relatif à une décomposition de la loi de probabilité sous la forme

$$A(X,\theta)\mathrm{d}X\, B_X(Y,\theta)\mathrm{d}Y$$

où X et Y sont deux fonctions distinctes de xy, indique que l'information i est la somme de l'information qu'on peut déduire de la loi marginale de X, et de l'information qu'on peut déduire de la loi de probabilité liée de Y.

On voit que, dans le cas du problème du Nil, pour toute solution de ce problème, l'information totale est fournie par la seule loi de probabilité de Y quand X est connu (espérance mathématique dans la loi totale). La forme générale de solution que nous avons donnée plus haut permet de former aisément une infinité de solutions particulières. En voici une très simple:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-X^2/2\right)\mathrm{d}X\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma(X,\theta)}\exp\left(-\{Y-m(X,\theta)\}^2/2\sigma^2(X,\theta)\right)\mathrm{d}Y.$$

La loi liée est gaussienne si, pour simplifier encore, on suppose σ indépendant de θ ou aux

$$i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sigma^2(X)}\left\{\frac{\partial m(X,\theta)}{\partial\theta}\right\}^2\exp\left(-X^2/2\right)\mathrm{d}X.$$

On peut trouver des formes explicites de solutions par un procédé moins

Fisher to G. Darmois: 26 *August* 1940

I have been reading your letter of August 20th and its extremely interesting enclosure. I am extremely sorry to hear of your accident with the automobile, which must have been most troublesome, though, from your letter, I am glad to see that you can now write perfectly.

With respect to your enclosure, of which I hope you have a copy, I believe it would be helpful as a matter of exposition to bring the size of the sample, let us say n, into the foreground at an early stage. Thus for the amount of information available on the average from a sample of n we have

$$i = E_n\{\partial(\log f)/\partial\theta\}^2$$

but after observing the ancillary statistic X the actual amount of information which our sample contains may be more or less than this expectation, namely

$$E_{n,X}\{\partial(\log f)/\partial\theta\}^2.$$

At this stage I think it is recognisable that the more general expectation is less appropriate to our particular experience than the more limited expectation, and that it was only by a thoughtless convention, or perhaps *faute de mieux*, through our not having discovered the ancillary function X, that the general expectation ever came to be adopted.

If the distribution of our estimate for given X still depends also on n, then n has been replaced by the pair of values n and X. Sometimes, as in the example I gave, and indeed not infrequently, X can be chosen so as to absorb n altogether, so that the knowledge of precision for which we formerly relied on n is now supplied by X only.

In elementary work this occurs for example when a regression coefficient is calculated by the familiar formula

$$b = S\{y(x-\bar{x})\}/S(x-\bar{x})^2.$$

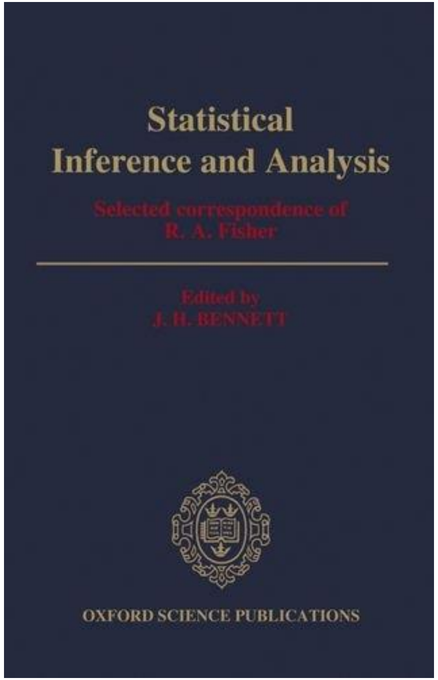
For any set of samples having given values $x_1, \ldots, x_n$ it is easily shown that if y is normally distributed with variance v for each value of x, the sampling variance of b is

$$v/S(x-\bar{x})^2;$$

b is normally distributed about the true regression β as mean, with this variance.

From this it follows that if we extend our aggregate of samples to include all having the same value of $S(x-\bar{x})^2$ as we have observed, the same distribu-

https://digital.library.adelaide.edu.au/dspace/bitstream/2440/10702/4/darm_dem.pdf



Calyampudi Radhakrishna Rao, papier de 1945 (2 ans après le papier et 6 ans après le cours de Maurice Fréchet)

C.R. Rao, “Information and accuracy attainable in the estimation of statistical parameters”, Bulletin of the Calcutta Mathematical Society, Vol.37, No.3, pp.81–91, 1945

Information and the Accuracy Attainable in the Estimation of Statistical Parameters

C Radhakrishna Rao

(Communicated by Mr. R C Bose–Received August 23, 1945

Introduction

The earliest method of estimation of statistical parameters is the method of least squares due to Markoff. A set of observations whose expectations are linear functions of a number of unknown parameters being given, the problem which Markoff posed for solution is to find out a linear function of observations whose expectation is an assigned linear function of the unknown parameters and whose variance is a minimum. There is no assumption about the distribution of the observations except that each has a finite variance.

A significant advance in the theory of estimation is due to Fisher (1921) who introduced the concepts of *consistency, efficiency and sufficiency* of estimating functions and advocated the use of the maximum likelihood method. The principle accepts as the estimate of an unknown parameter θ, in a probability function $\phi(\theta)$ of an assigned type, that function $t(x_1, \ldots, x_n)$ of the sampled observations which makes the probability density a maximum. The validity of this principle arises from the fact that out of a large class of unbiased estimating functions following the normal distribution the function given by maximising the probability density has the least variance. Even when the distribution of t is not normal the property of minimum variance tends to hold as the size of the sample is increased.

Harald Cramer, papier de 1946

Harald Cramér (1946): A contribution to the theory of statistical estimation, Scandinavian Actuarial Journal, 1946:1, 85-94

A Contribution to the Theory of Statistical Estimation.

By **Harald Cramér** (Stockholm).

1. The Estimation Problem.

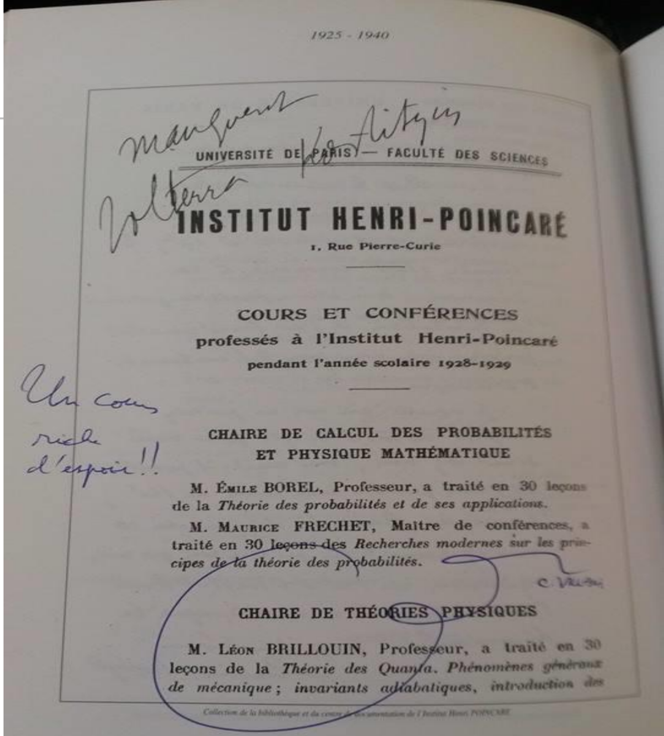
In problems of statistical estimation, we are concerned with certain variables assumed to be random variables having more or less unknown probability distributions. A number of observed values of these variables are given, and it is required to use these values to learn something about the unknown distributions.

The classical theory of errors of observation deals with a special group of problems of this type. In its modern, more general form, the theory of statistical estimation was founded by R. A. FISHER, to whom the main ideas and results of the theory are due.[1] FISHER considers in the first place the problems which arise when the mathematical form of the distributions is assumed to be known, the only unknown element being a certain number of parameters, the numerical values of which it is required to estimate by means of the data. In the present paper, we shall be concerned with a general problem of this type, restricting ourselves to the case of distributions of the continuous type (Mathematical Methods, 22.1). An obvious modification of the method used below will suffice to give the analogous results for distributions of the discrete type.

Maurice Fréchet et les cours à l'Institut Henri Poincaré dès 1928-1929

Fréchet à l'IHP

- En 1928 est créé à l'université de Paris l'institut Henri-Poincaré, notamment pour développer l'enseignement des probabilités, sous la direction d'Émile Borel. Maurice Fréchet est nommé maître de conférences de probabilité le 1er novembre 1928 et professeur sans chaire le 19 décembre.
- Années 1930: l'Institut Henri Poincaré devient ainsi un pôle attracteur pour ceux qui veulent étudier les probabilités autour des personnalités de Maurice Fréchet et de Georges Darmois.
- Le 1er octobre 1941 il succède à Émile Borel à la chaire de calcul des probabilités et physique mathématiques jusqu'à sa retraite en 1949.
- Il fut directeur des laboratoires de calculs et de statistiques de l'institut Henri Poincaré.



1925 - 1940

UNIVERSITÉ DE PARIS — FACULTÉ DES SCIENCES

INSTITUT HENRI-POINCARÉ

1, Rue Pierre-Curie

COURS ET CONFÉRENCES

professés à l'Institut Henri-Poincaré

pendant l'année scolaire 1928-1929

Un cours riche d'espoir !!

CHAIRE DE CALCUL DES PROBABILITÉS ET PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

M. Émile BOREL, Professeur, a traité en 30 leçons de la *Théorie des probabilités et de ses applications.*

M. Maurice FRECHET, Maître de conférences, a traité en 30 leçons des *Recherches modernes sur les principes de la théorie des probabilités.*

CHAIRE DE THÉORIES PHYSIQUES

M. Léon BRILLOUIN, Professeur, a traité en 30 leçons de la *Théorie des Quanta. Phénomènes généraux de mécanique ; invariants adiabatiques, introduction des*

174

1er cours de l'Institut Henri Poincaré E. Borel, M. Fréchet et L. Brillouin

Cinq normaliens (Dugué, Malécot, Ville, Fortet et Blanc-Lapierre) suivent des cours auprès de Maurice Fréchet à l'IHP et à l'École normale supérieure.

Semaine à Paris 1930, ce qui se fera, se verra, s'entendra et tourisme – Cours de Maurice Fréchet à l'IHP

la semaine à paris

journal illustré paraissant le vendredi

éditeur de *paris weekly, die woche in paris*
les quatre saisons, le journal de france

rédaction, administration, publicité : **28, rue d'assas (VI^e)**

tél. : littré 58-63 et la suite (4 lignes) chèque postal 610-93
abonnements : france et colonies : 1 an, 50 fr. ; 6 mois, 30 fr. ; 3 mois, 20 fr.
pour l'étranger suivant les tarifs postaux de chaque pays

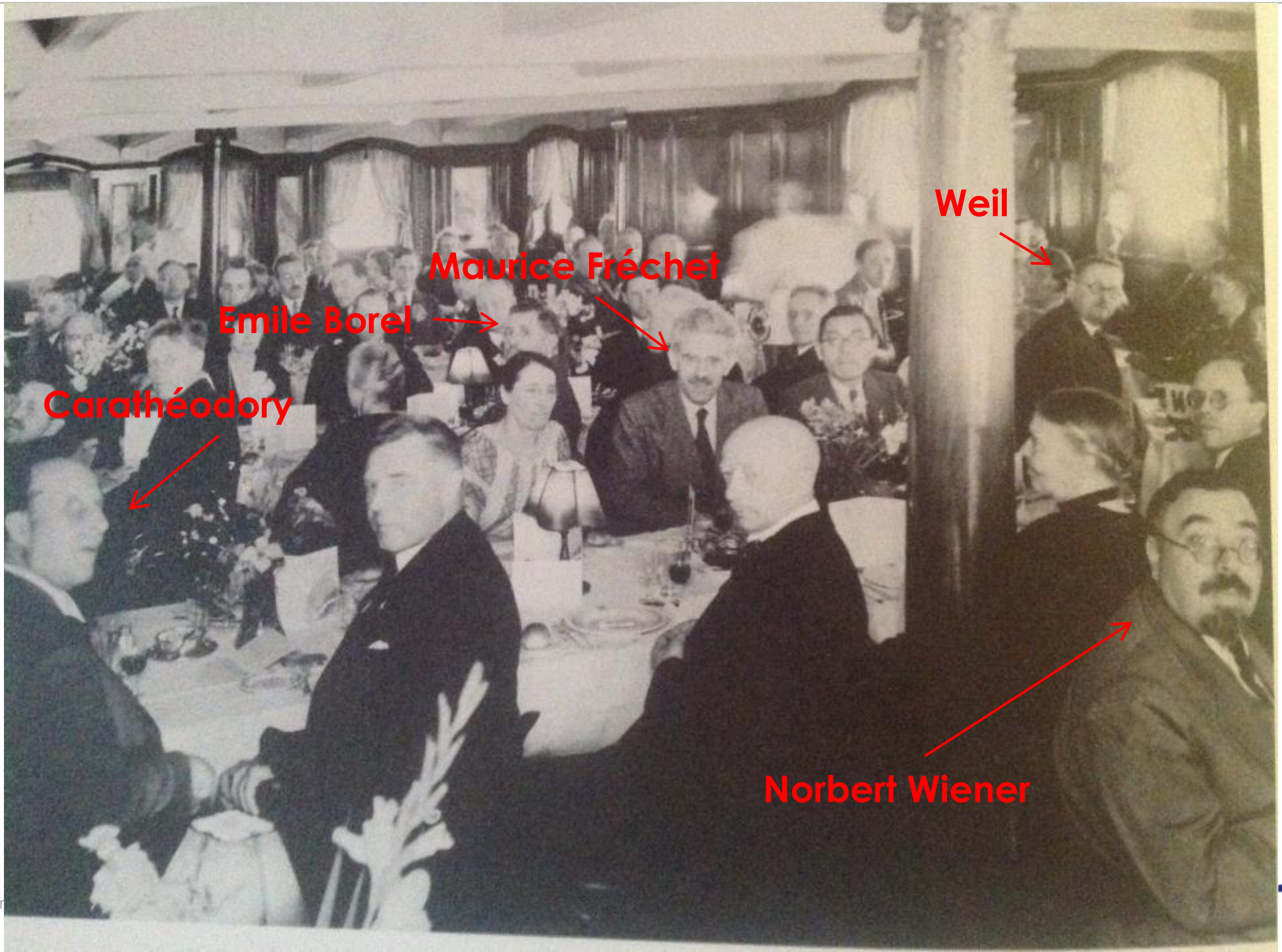
directeur-fondateur : charles de saint-cyr
rédacteur en chef : claude-fayard ■ administrateur : h. de marcley
secrétaire général : françois ribadeau dumas

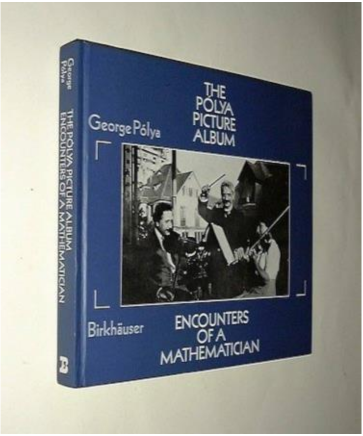
N° 439 — 10e Année. Du 24 au 31 Octobre 1930

Curie). — **Calcul des Probabilités et Physique mathématique :** M. Emile Borel : La théorie des probabilités et ses applications, les mercredis et vendredis, à 11 h. (Amphit. Darboux, Institut Henri Poincaré, 1, r. Pierre-Curie). — **Calcul des probabilités :** M. Maurice Fréchet, les lundis à 15 h. 15 et les mardis à 14 h. (Amphit. Darboux, Institut Henri Poincaré, 1, rue Pierre-Curie) : En novembre et décembre : les applications de la Théorie des équations intégrales. En janvier et février : la loi des grands nombres. — Travaux pratiques à l'Institut Poincaré, les samedis de 14 h. 30 à 17 h. 30 (à partir du 6 décembre). — **Théories physiques :** M. L. Brillouin : La Théorie du Corps noir, les statistiques quantiques, la chaleur spécifique des corps solides et leur équation d'état, conductibilité calorifique des solides, les mercredis et vendredis, à

GEOMETRIE SUPERIEURE. — M. Cartan : Propriétés différentielles des surfaces réglées, les jeudis à 10 h. 30 et samedis, à 9 h. (Institut Henri Poincaré, 1, rue Pierre-Curie). — **Calcul différentiel et Calcul intégral :** M. Goursat : Opérations du calcul différentiel et du calcul intégral et des éléments de la théorie des fonctions analytiques, les lundis et jeudis, à 9 heures. (Institut Henri Poincaré, 1, rue Pierre-Curie). — M. Denjoy : Conférences de calcul différentiel et de calcul intégral, les vendredis, à 15 h. 30. (Amphithéâtre Darboux, Institut Henri Poincaré). — **Applications de l'analyse à la Géométrie :** M. Julia : Préparation au certificat de calcul différentiel et de calcul intégral. Applications géométriques du calcul différentiel, les lundis à 10 h. 30. (Amphithéâtre Hermite, Institut Poincaré). — **Mécanique Rationnelle :** M. Montel, professeur ; M. Jean Chazy, chargé du cours : La Dynamique, la Statique, les mardis et vendredis, à 9 h. (Amphit. Hermite, 1, rue Pierre-Curie). — M. Julia : Cours sur la cinématique, les lundis, à 14 h. 30. (Amphit. Hermite, Institut Poincaré). — M. Cahen : Conférences de mécanique rationnelle, les samedis, à 9 h. (Amphit. Hermite, Institut Poincaré, 1, rue Pierre-Curie). — **Théorie des Fonctions et Théorie des Transformations :** M. Vessiot et M. Montel : Suites de polynomes et fractions rationnelles, le mardi à 10 h. 30 (Amphit. Darbout, Institut Poincaré, 1, r. Pierre-Curie). — **Mathématiques générales préparatoires aux Sciences physiques :** M. Julia et M. R. Garnier, les lundis et mardis, à 17 h. 30 (Amphit. de Chimie, 1, rue Pierre-Curie). — M. Le Roy : Conférences de mécanique les mercredis, à 17 h. 30 (même local). — MM. E. Cahen et Michel : Travaux pratiques de mathématiques générales, les jeudis, à 17 h. 30 (Amphit. Milne-Edwards, 1, rue Pierre-Curie). — **Calcul des Probabilités et Physique mathématique :** M. Emile Borel : La théorie des probabilités et ses applications, les mercredis et vendredis, à 11 h. (Amphit. Darboux, Institut Henri Poincaré, 1, r. Pierre-Curie). — **Calcul des probabilités :** M. Maurice Fréchet, les lundis à 15 h. 15 et les mardis à 14 h. (Amphit. Darboux, Institut Henri Poincaré, 1, rue Pierre-Curie) : En novembre et décembre : les applications de la Théorie des équations intégrales. En janvier et février : la loi des grands nombres. — Travaux pratiques à l'Institut Poincaré, les samedis de 14 h. 30 à 17 h. 30 (à partir du 6 décembre). — **Théories physiques :** M. L. Brillouin : La Théorie du Corps noir, les statistiques quantiques, la chaleur spécifique des corps solides et leur équation d'état, conductibilité calorifique des solides, les mercredis et vendredis, à 9 h. 30 (Ampit. Darboux, Institut Henri Poincaré, 1, rue Pierre-Curie). — M. Louis de Broglie : La théorie de l'électron magnétique de Dirac, les lundis et jeudis à 9 h. 15 (Amphit. Darboux, Institut Henri Poincaré). — **Mécanique Physique et Expérimentale :** M. G. Kœnigs : Principes généraux de la mécanique appliquée et des moteurs soit hydrauliques, soit thermiques, les lundis et jeudis, à 11 h. (Laboratoire de mécanique expérimentale, 96, bd Raspail) : Travaux pratiques : M. Kœnigs, pour tous les élèves, le lundi et le jeudi, de 8 h. 30 à 12 h. — M. Villey : Propriétés et modes d'utilisation des matériaux solides, les lundis, à 17 h. 30 (au Laboratoire, 96 boulevard Raspail). — **Astronomie :** M. Esclangon, les mardis et mercredis à 10 h. 30. Astronomie générale. — M. A. Lambert : Conférences d'astronomie pratique, les mardis, à 15 h. (Amphit. Le Verrier) et exercices pratiques les mardis et mercredis à 9 h. (Amphit. Le Verrier) et ultérieurement à l'Observatoire du Parc de Montsouris. — **Aviation :** M. Marchis : Etude de la construction et du calcul des avions. Préparation au Certificat de Technique aéronautique. Mardi, jeudi, à 17 h. 30 (Amphit. de Géologie). — Exercices pratiques à l'Institut aéronautique de Saint-Cyr, sous la direction de M. Toussaint, qui fera des conférences sur laérodynamique appliquée et l'aérodynamique expérimentale, les mercredis et vendredis, à 17 h. 30 (Amphit. de Géologie). Des conférences seront faites sur l'Aérodynamique et l'Hydrodynamique théoriques et appliquées. Ces conférences seront annoncées par affiches spéciales. — **Mécanique Théorique des Fluides :** M. H. Béghin : Les théories générales de l'Hydro et de l'Aérodynamique, les mercredis à 15 h. 30 et les vendredis à 15 h. 15 (Amphit. Le Verrier). — **Mécanique Expérimentale des Fluides et Applications :** M. Henri Bénard : Les spectres hydro et aérodynamiques et de l'étude expérimentale des tourbillons dans les liquides et dans le gaz, les lundis et mercredis, à 10 h. 30 (Salle des Conférences de physique). — M. A. Foch : Les principes de la mécanique expérimentale des fluides, les mardis et jeudis à 9 h. (Salle des Conférences de physique). — **Physique :** M. Ch. Fabry : L'optique (Radiations, interférences, diffraction), les mardis et samedis à 10 h. 45 (Amphit. de Physique). — M. Guillet, les lundis et jeudis, à 14 h. 30 : L'électricité. Il fera en outre des exercices et des interrogations en correspondance avec les cours préparatoires au Certificat de Physique. — M. E. Darmois : La thermodynamique de la conductibilité électrique dans le vide et dans les gaz, les mercredis, à 14 h. et les vendredis, à 14 h. (Amphit. Physique). — M. De-

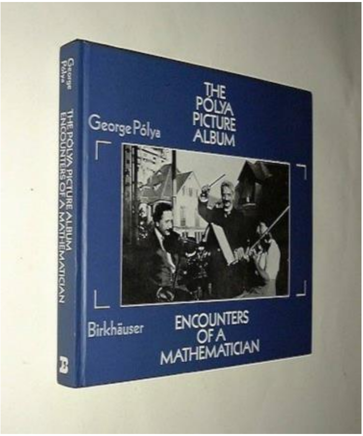
Maurice Fréchet, Borel, Wiener, Weil et Carathéodory
Congrès d'Oslo 1936





© The Polya Picture Album: Encounters of a Mathematician, Birkhäuser, 1987

Maurice Fréchet, Darmois, Cramer et Fisher
Congrès Calcul des probabilités – Genève 1938



© The Polya Picture Album: Encounters of a Mathematician, Birkhäuser, 1987

Rao et Fréchet au Colloque de 1948

"The latest count of the number of international conferences I attended is close to 200. The first one was the Colloquium on Probability and Statistics held in Lyon, France, in 1948. There, I met Doob, Fréchet, and a few other well-known probabilists. I also met LeCam, who was still a student planning to go to the United States for higher studies.“ – **C.R. Rao (Interview by Anil K. Bera)**

1. G. Ottaviani (Italy): *The Uniform Law of Large Numbers in the Classic Theory of Probability.*
2. J. L. Doob (USA): *Application of the Theory of Martingales.*
3. D. van Dantzig (Holland): *On the Method of Generating Functions.*
4. H. Wold (Sweden): *On Stationary Point Processes.*
5. J. Wishart (UK): *Test of Homogeneity of Regression Coefficients.*

1. G. Darmois: *On Certain Forms of Relations of Probabilities.*
2. M. Fréchet: *The Typical Values of Order Zero or Infinity of a Random Number and Their Generalization.*
3. P. Lévy: *Double Markov Processes.*
4. A. Blanc Lapierre: *Considerations on the analysis of random functions.*
5. J. Kampé de Fériet: *Stationary Random Functions and Transformation Groups in an Abstract Space.*
6. E. Halphen: *On the Problem of Estimation.*
7. P. Delaporte: *On the Use of Systematics of Mathematical Statistics in Factorial Analysis.*
8. R. Fortet: *Probability of Loss of a Telephone Call.*
9. J. Ville: *Random Functions and Transmission of Information.*
10. G. Malécot: *Stochastic Processes and Genetics.*
11. H. Eyraud: *Pure Economy. Credit and Speculation.*

C. R. Rao, who did not present a lecture, participated in all the meetings and intervened several times, once following the exposition of Doob… Only Rao asked Doob a question, relating to a problem of nonparametric statistics in the framework of martingales. ..After Doob's presentation, only Calyampudi Radhakrishna Rao rose to ask questions, on the possibility of applying the method without an a priori distribution for θ, as in the nonparametric case.

APPLICATION OF THE THEORY OF MARTINGALES

by J. L. DOOB.

(Urbana, Ill., U. S. A.)

Doob at Lyon. On his lecture, Application of the Theory of Martingales, at the Lyon Colloquium, June 28 – July 3, 1948, Bernard LOCKER

Rao et Fréchet au Colloque de 1948

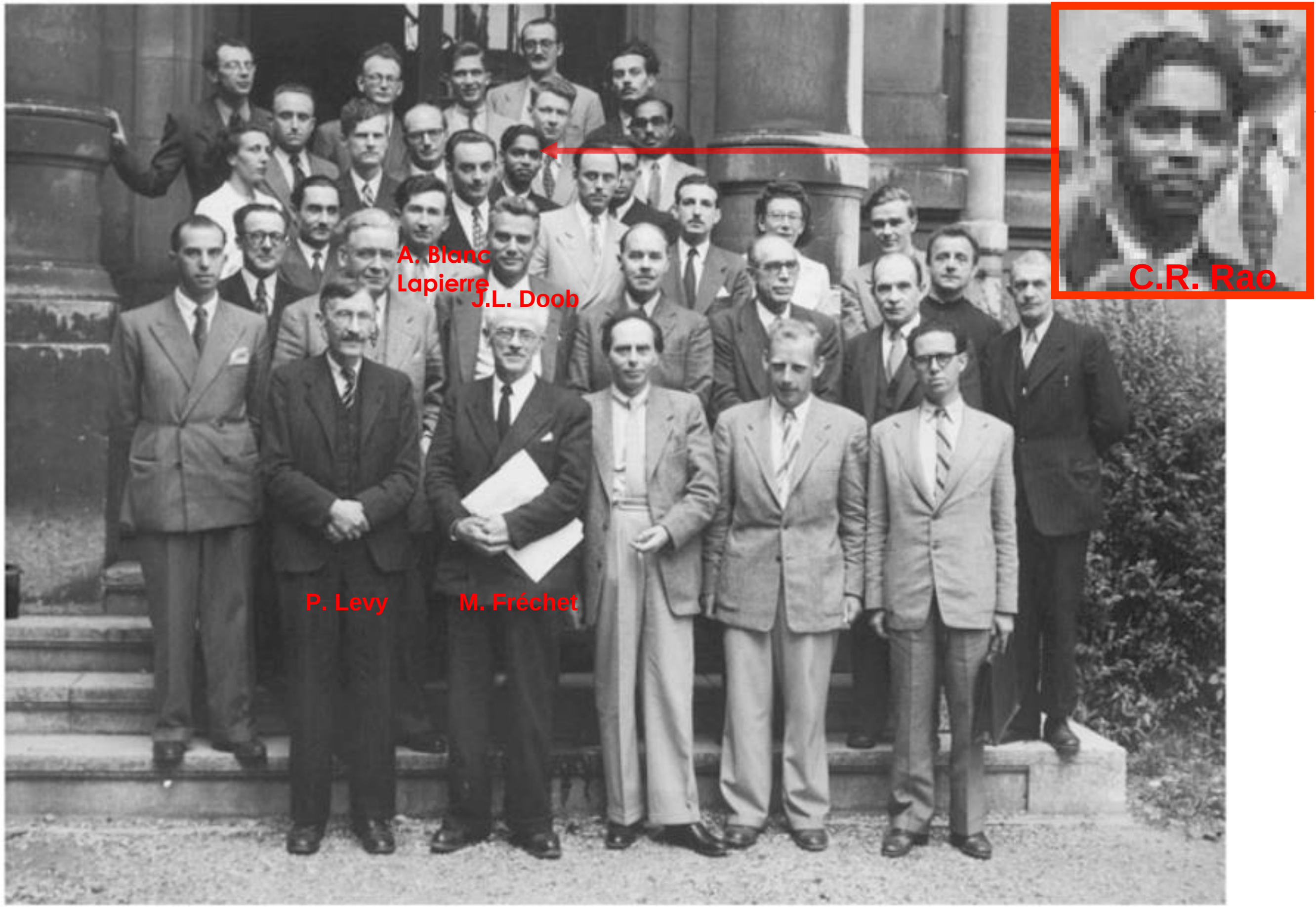
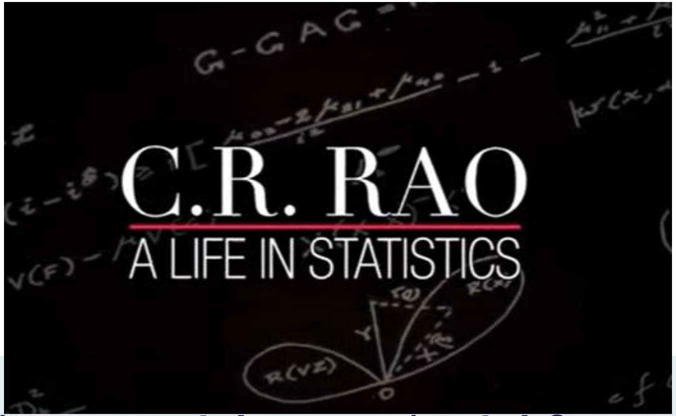


Fig. 9 Colloque International sur le Calcul des Probabilités, Lyon 1948. First row: Paul Lévy and Maurice Fréchet. On the picture one can find among others J. Doob, R. Fortet, D. Van Dantzig, E. Mourier, J. Kampé de Fériet, A. Blanc-Lapierre. . . . (Photo: © Private collection F. Lederer)

C.R. Rao (1920-2023)

C.R. Rao: A Life in Statistics II (extended version)



C.R.Rao (100th Birthday VIDEO) : https://www.youtube.com/watch?v=eaxjUxoCx5w

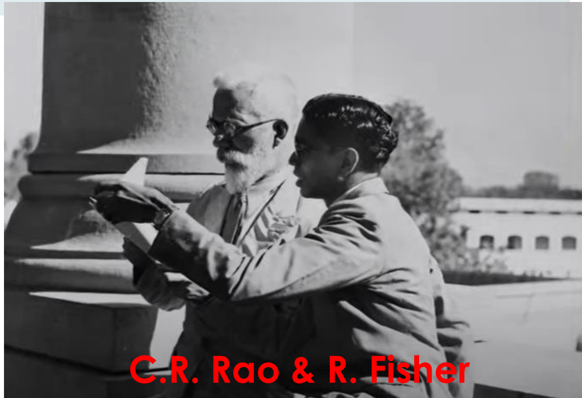
Institut de France Academie des Sciences

In collaborating in the collection of memoirs which are going to be dedicated in homage to you I have given expression to the high esteem in which I hold your scientific works and their applications and the advancements which you have made in the education and application of statistics in India.

I can assure you without going in for votes (and I have been authorised to inform you) that the sentiments which I have expressed are also shared by my co-workers in the Academy of Sciences. We also hope that the bonds of friendship which have been forged between your great country and ours during the past years may continue being strengthened. Permit me, my dear colleague, to express my most cordial and best regards for you.

Maurice Frechet

https://franknielsen.github.io/CRRao/



C.R. Rao & R. Fisher

C.R. Rao (1920-2023)

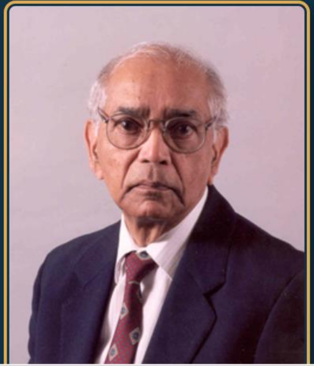
INTERNATIONAL PRIZE in STATISTICS

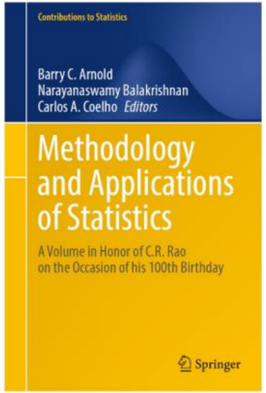
About Contributions Nominations Organization Previous Winners Home

Eminent Statistician C.R. Rao Awarded 2023 International Prize in Statistics

C.R. Rao, a professor whose work more than 75 years ago continues to exert a profound influence on science, has been awarded the 2023 International Prize in Statistics.

In his remarkable 1945 paper published in the *Bulletin of the Calcutta Mathematical Society*, Calyampudi Radhakrishna (C.R.) Rao demonstrated three fundamental results that paved the way for the modern field of statistics and provided statistical tools heavily used in science today.





Fisher-Rao Riemannian geometry (Hotelling precursor)

C. R. Rao with Sir R. Fisher in 1956

Metric tensor = **Fisher information metric**

$$g_{jk}(\theta) = \int_X \frac{\partial \log p(x,\theta)}{\partial \theta_j} \frac{\partial \log p(x,\theta)}{\partial \theta_k} p(x,\theta)\, dx.$$

Infinitesimal squared length element:

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{ij} g_{ij}(\theta)\mathrm{d}\theta_i \mathrm{d}\theta_j = \mathrm{d}\theta^T I(\theta)\mathrm{d}\theta$$

Fisher-Rao distance satisfying the metric axioms:

$$\rho(p(x;\theta_1), p(x;\theta_2)) = \min_{\substack{\theta(s)\\ \theta(0)=\theta_1\\ \theta(1)=\theta_2}} \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\right)^T I(\theta) \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}}\mathrm{d}s$$

Geodesic length distance (shortest path)

- Statistical data analysis and inference, Yadolah Dodge (Ed), 1989
- An elementary introduction to information geometry, arXiv:1808.08271
- Cramér-Rao Lower Bound and Information Geometry, Connected at Infinity II, 2013 - Springer

Borne de Fréchet, matrice de Fisher et détection des ondes gravitationnelles par le réseau LIGO-VIRGO-KAGRA

ACCURACY OF ESTIMATING HIGHLY ECCENTRIC BINARY BLACK HOLE PARAMETERS WITH GRAVITATIONAL-WAVE DETECTIONS

LÁSZLÓ GONDÁN[1,2], BENCE KOCSIS[1], PÉTER RAFFAI[1,2], AND ZSOLT FREI[1,2]
[1]Eötvös University, Institute of Physics, Pázmány P. s. 1/A, Budapest, Hungary 1117 and
[2]MTA-ELTE EIRSA "Lendület" Astrophysics Research Group, Budapest, Hungary 1117

Draft version May 31, 2017

ABSTRACT

Mergers of stellar-mass black holes on highly eccentric orbits are among the targets for ground-based gravitational-wave detectors, including LIGO, VIRGO, and KAGRA. These sources may commonly form through gravitational-wave emission in high velocity dispersion systems or through the secular Kozai-Lidov mechanism in triple systems. Gravitational waves carry information about the binaries' orbital parameters and source location. Using the Fisher matrix technique, we determine the measurement accuracy with which the LIGO-VIRGO-KAGRA network could measure the source parameters of eccentric binaries using a matched filtering search of the repeated burst and eccentric inspiral phases of the waveform. We account for general relativistic precession and the evolution of the orbital eccentricity and frequency during the inspiral. We find that the signal-to-noise ratio and the parameter measurement accuracy may be significantly higher for eccentric sources than for circular sources. This increase is sensitive to the initial pericenter distance and component masses. For instance, compared to a $30M_\odot - 30M_\odot$ non-spinning circular binary, the chirp mass and sky localization accuracy can improve for an initially highly eccentric binary by a factor of ~ 30 (3.6) and ~ 1.5 (6) assuming an initial pericenter distance of $20M_{\rm tot}$ ($10M_{\rm tot}$).

Keywords: black hole physics – gravitational waves

Optimal solution to the inverse problem for the gravitational wave signal of a coalescing compact binary

Piotr Jaranowski and Andrzej Krolak
Phys. Rev. D **49**, 1723 – Published 15 February 1994

Borne de Fréchet, matrice de Fisher et détection du Boson de Higgs au LHC

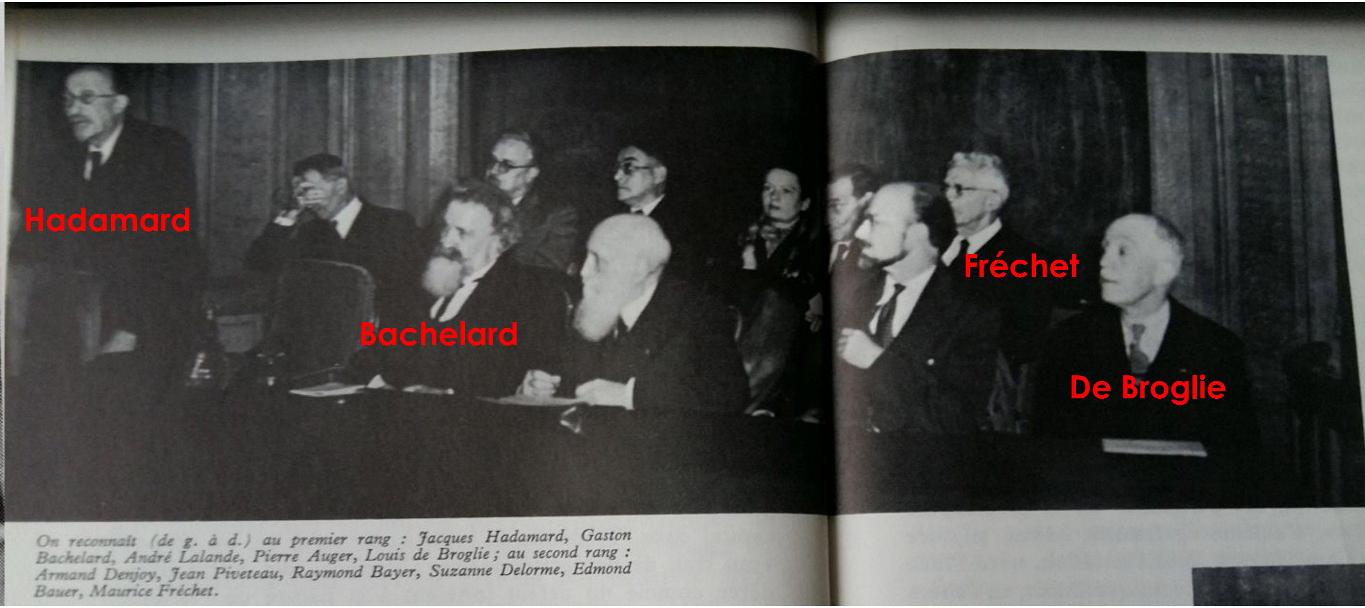
New Ideas for Effective Higgs Measurements

Brehmer, Johann

Second, we use information geometry to understand and optimise Higgs measurements at the LHC. Our novel approach is based on the Fisher information, which encodes the maximum precision with which theory parameters can be measured in an experiment. We develop an algorithm to calculate the Fisher information in LHC processes and compute the information on dimension-six operators in different Higgs signatures. We demonstrate how information geometry lets us improve event selections, determine the most powerful observables, and compare the power of modern multivariate techniques to that of traditional histogram-based analyses.

[4] J. Brehmer, K. Cranmer, F. Kling, and T. Plehn: **Better Higgs boson measurements through information geometry.** Phys. Rev. D95 (7), p. 073002, 2017. arXiv:1612.05261.

Maurice Fréchet au Congrès international de Philosophie1949



Fréchet et Bachelard

Congrès international de Philosophie des Sciences, Amphi Richelieu, Sorbonne 1949 (Jacques Hadamard, Gaston Bachelard, André Lalande, Pierre Auger, Louis de Bloglie, Armand Denjoy, Jean Piveteau, Raymond Bayer, Suzanne Delorme, Edmond Bauer, Maurice Fréchet)

THALES

Les éléments aléatoires de nature quelconque dans un espace distancié

Notice sur les travaux scientifiques – suppléments pour la période 1934-1951 : Maurice Fréchet

SUPPLÉMENT

pour la période 1934-1951

à la

NOTICE

SUR LES TRAVAUX SCIENTIFIQUES

DE

M. Maurice FRÉCHET

(104 pages, chez HERMANN, 1933)

NOTICE

sur les

TRAVAUX SCIENTIFIQUES

DE 1934 à 1951

ORIENTATION GÉNÉRALE

Après plus de quarante cinq années de recherches (qui ne sont pas encore terminées), il m'est sans doute plus facile qu'auparavant de discerner, en jetant un regard en arrière, les tendances inconscientes qui ont orienté mes travaux.

C'est peut-être d'abord un souci constant d'essayer de dégager l'essentiel de l'accessoire. Souci qui m'a conduit d'une part à essayer souvent de porter une proposition particulière à son maximum de généralisation utile; d'autre part à effectuer parfois la synthèse de propositions éparses qui me semblaient relever d'une même théorie à constituer.

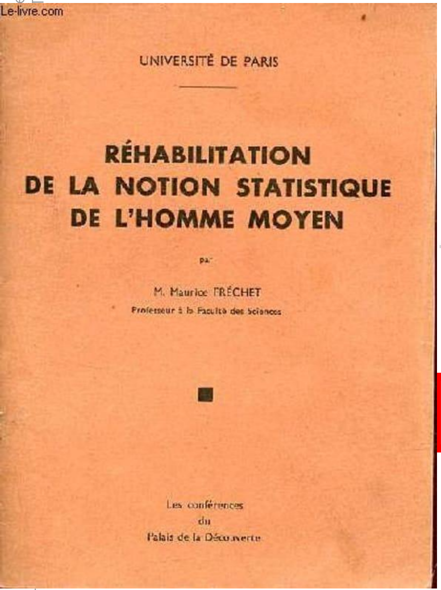
C'est ensuite un éclectisme qui m'a porté à m'intéresser plus tard aux applications, - même s'il le fallait, purement numériques - aussi bien qu'aux théories abstraites par lesquelles j'avais débuté.

C'est aussi une obsession de rigueur qui m'a sans doute conduit souvent à entrer dans trop de détails et qui a maintes fois retardé la publication de mes conclusions tandis que d'autres sont enclins à sauter sur les difficultés de rigueur ou même à les ignorer. Mais c'est ce souci qui m'a permis d'éviter généralement les fautes et de déceler dans les écrits de mathématiciens illustres des erreurs passées jusque-là inaperçues.

C'est enfin un penchant à m'écarter des sentiers battus, à tenter de résoudre les questions qui se posent plutôt que les questions qu'on avait déjà posées.

Je dépeins ainsi mon activité sous un jour sans doute trop favorable, confondant peut-être l'idéal poursuivi avec le résultat atteint. Le résumé de mes travaux figurant dans ma Notice principale et dans ce Supplément, aidera peut-être le lecteur à se faire sur ce point, une idée personnelle. La petite statistique qui suit servira le même objet.

Notice sur les travaux scientifiques – suppléments pour la période 1934-1951 : Maurice Fréchet



AVERTISSEMENT

Comme je me suis fait connaître d'abord par mes travaux sur les "Espaces abstraits" (1) et "L'Analyse générale", j'ai voulu mettre en évidence mes autres travaux en les classant (dans ce Supplément comme dans ma première Notice) dans un ordre systématique allant du concret à l'abstrait.

C'est l'ordre que je suivrai dans l'exposé suivant, où, à regret, j'ai dû pour ne pas alourdir cette Notice, me limiter à quelques points saillants plus faciles à exposer sans détails techniques.

ANALYSES PARTICULIÈRES

- En Mécanique, nous avons fait observer (196) (2) que la loi des aires est souvent présentée de façon à laisser croire qu'un point soumis à une force centrale et qui commence par se diriger vers le centre, doit rester indéfiniment sur une droite illimitée. Alors que sa trajectoire peut être une étoile rectiligne issue du centre des forces.

- En Econométrie, après avoir cherché, comme beaucoup d'autres, une bonne formule empirique pour la répartition des revenus, nous avons présenté les premières théories générales (239) de cette répartition. Cette dernière est ainsi considérée, soit comme analogue à un jeu de hasard, soit comme résultant des caractéristiques individuelles, avec action du milieu et du hasard.

- En Statistique mathématique, nous avons présenté (269) deux définitions statistiques de "l'homme moyen" (ou plutôt de l'homme typique d'une population), définitions nouvelles échappant à l'objection faite par Joseph Bertrand à la définition statistique de l'homme moyen due à Quetelet.

- Nous avons engagé une campagne (158 à 162, 178, 186) contre, non pas l'usage, mais l'abus qui est fait du coefficient de linéarité dit de corrélation. Sur notre proposition, deux motions en ce sens ont été successivement adoptées par l'Institut International de Statistique à ses sessions de Londres et d'Athènes. A l'appui de nos objections, nous avons montré (168) que ce coefficient est le produit du "rapport de corrélation" de K.Pearson par un facteur qui n'a rien à faire avec la corrélation et repère seulement le caractère plus ou moins linéaire de la ligne des moyennes. D'autre part, on avait cru échapper à diverses critiques en effectuant sur chacune des deux variables considérées une transformation les rendant chacune "laplacienne" (= normale). Nous avons montré (278) que le couple obtenu pouvait, contrairement à ce qui était attendu, ne pas vérifier la loi de Bravais.

Après cette étude de caractère négatif, nous avons apporté une contribution positive en signalant que certains indices de corrélation connus et d'autres que nous avons proposés (242) possèdent les caractéristiques qui manquent au coefficient dit de corrélation.

- On sait que, sous certaines conditions, les probabilités données par la loi de Bayes-Laplace tendent, quand le nombre des observations croît, vers des limites indépendantes des probabilités à priori. Nous avons montré (256) que, même pour un petit nombre d'observations, on peut enfermer les probabilités à posteriori entre des limites indépendantes des probabilités à priori pourvu que celles-ci vérifient des conditions simples très larges.

- En calcul des probabilités, nous sommes parti de résultats épars concernant les systèmes d'événements aléatoires. Et en les complétant, les unifiant et les généralisant (209 à 213), nous en avons fait un *nouveau chapitre* (214 et 219) du Calcul des Probabilités.

Il en avait été de même pour les "probabilités enchaînées" dans le cas, mentionné dans notre première Notice, d'un nombre fini d'états possibles. Nous avons ensuite continué notre étude par l'examen du cas d'une suite continue d'états (156, 165, 171, 173, 179), cas où nous avons indiqué plusieurs façons de résoudre l'équation de Chapman-Kolmogoroff.

- Nous avons enfin ouvert un *second nouveau* Chapitre du Calcul des Probabilités en abordant l'étude des éléments aléatoires de nature quelconque. Déjà l'étude actuellement en cours, par de nombreux auteurs, des processus stocastiques et des fonctions aléatoires avait montré la nécessité de l'étude d'éléments aléatoires autres que les nombres et les points des espaces euclidiens, (seuls envisagés en Calcul des Probabilités jusqu'à une époque récente). Il nous est apparu que, si cela était possible, il ne fallait ni limiter le champ des éléments aléatoires à considérer, ni attendre d'avoir à refaire pour chacun d'eux une théorie spéciale correspondante.

Nous avons montré qu'il était possible en effet, d'étendre à des éléments aléatoires de nature non spécifiée (nombres, fonctions, courbes, surfaces, etc...) les plus importantes notions classiques du Calcul des Probabilités et de la Statistique mathématique. Que ce soient les positions typiques (moyenne, équiprobable, dominante, centrale, d'ordre $r > 0$, etc...) d'un élément aléatoire ou sa dispersion ou sa loi de probabilité, que ce soient les convergences stocastiques, il suffit, pour en étendre les définitions (253, 257), qu'on puisse considérer l'élément aléatoire envisagé comme faisant partie d'un espace "distancié". Si l'on veut avoir des définitions constructives et non simplement descriptives, il sera plus commode de se limiter au cas des espaces "vectoriels distanciés". Ces derniers sont les espaces imaginés à la fois par Banach, Hahn et Wiener en combinant les caractéristiques des espaces vectoriels abstraits (non topologiques) de Laguerre et Grassmann avec celles de nos espaces distanciés. Dans ces espaces, on pourra représenter la position moyenne par une intégrale abstraite convenablement définie (237), on pourra généraliser la loi de Laplace (274), etc...

- En géométrie, nous avons présenté (208) une définition intrinsèque de l'aire d'une surface, dérivant d'une définition analytique due à Elie Cartan et retrouvée par W.H. Young. Notre définition a été ensuite généralisée par O. Haupt.

- En calcul différentiel, nous avons, (185, 198) rectifié certains énoncés trop simplistes des propriétés du wronskien. Nous avons aussi développé une méthode nouvelle pour arriver à certains théorèmes ergodiques sans passer par l'intermédiaire des équations de la Mécanique, en considérant certains mouvements comme des transformations représentables par des fonctions asymptotiquement presque périodiques. Nous avons d'ailleurs l'intention de modifier la description des propriétés de ces

---

(1) Plusieurs mathématiciens éminents de France et de l'étranger m'ont fait l'honneur, soit en privé, soit en conférence publique, de me qualifier comme le "Créateur de la théorie des espaces abstraits".

(2) Les N^{os} entre parenthèses renvoient à une liste bibliographique rangée par ordre chronologique et qui paraîtra ailleurs.

Notice sur les travaux scientifiques – suppléments pour la période 1934-1951 : Maurice Fréchet

fonctions données dans les mémoires (221, 222) et en même temps de les généraliser. C'est du reste ce que nous avons commencé à faire dans une première Note (273).

- Dans (282), nous avons donné un exemple de matrices A, B *non* commutables et vérifiant pourtant l'égalité

$$e^{A+B} = e^{A} e^{B}$$

- La théorie des probabilités en chaîne nous a amené à décrire (155, 180) l'allure asymptotique des noyaux itérés (de Fredholm) et même à préciser leur expression en fonction de n.

- Dans la théorie des espaces abstraits nous avons pu former une condition nécessaire et suffisante très simple (166, 172) pour qu'un espace vectoriel distancié corresponde (dans une transformation biunivoque qui conserve les distances et transforme les vecteurs en vateurs) à l'espace de Hilbert ou à un espace euclidien à un nombre fini de dimensions. Une des formes de cette condition consiste en ce que : 1°- l'espace considéré soit "séparable", 2°- que dans cet espace le carré de la norme du point X soit une fonction "du second ordre" (1)(et homogène) de X.

- Dans ma Thèse, commençant l'étude des espaces abstraits par celle des espaces les plus simples, j'avais défini les points d'accumulation d'un ensemble par l'intermédiaire de suites convergentes dénombrables. Certains commentaires m'avaient amené non pas longtemps après, mais seulement quatre ans après, en 1910, à écrire (34, p. 26, § 35): "Je ne voudrais pas cependant que ma pensée fut si dénaturée qu'on m'attribue l'illusion d'avoir établi pour toujours les limites dans lesquelles devront se développer les théories des diverses classes concrètes". Et j'indiquais comme un des sujets d'étude, les espaces de F. Riesz dans la définition desquels, les suites dénombrables ne jouent aucun rôle. Cette précaution était tout à fait inutile pour les nombreux mathématiciens qui, non seulement avaient suivi mes travaux avec sympathie mais avaient contribué à les prolonger dans le même esprit. Pourtant, il est apparu que la citation ci-dessus était passée inaperçue de quelques uns. Ceux-ci, bien plus tard et même assez récemment, m'ont encore attribué l'idée de vouloir m'opposer à la considération d'une topologie qui ne serait pas fondée sur l'intermédiaire de suites dénombrables convergentes. Pourtant déjà en remontant aussi loin que 1917 et 1918 j'avais dépassé en généralité les premiers de ceux qui partant de mes premiers travaux les avaient étendus au cas de suites non dénombrables. C'est ainsi que j'avais défini les espaces (v) où, à chaque point a est attachée une famille quelconque d'ensembles appelés "voisinages" de a. J'espère que ces quelques mots suffiront à dissiper définitivement un malentendu qui d'ailleurs était resté tout à fait localisé.

Au point de vue des applications tous ces espaces très généraux perdent d'ailleurs leur intérêt et il est préférable d'avoir recours à la notion de "distance" de deux éléments abstraits que j'ai introduite dès 1905. Il est bien vrai que la valeur numérique de la distance n'est pas un invariant topologique, mais son existence en est un.

La distance permet de définir les espaces "distanciables" (dont l'utilité n'est plus à démontrer) d'une façon infiniment plus simple et plus intuitive que par les propriétés topologiques équivalentes. C'est donc en généralisant (et non en écartant) la notion de distance numérique que nous avons pu définir la continuité uniforme dans des espaces plus généraux que les espaces distanciés.

Il a suffit pour cela de remplacer l'échelle numérique des distances par une échelle ordonnée d'écarts abstraits (235, 240, 249). Nous parvenions ainsi au même but (mais d'une façon plus intuitive et s'écartant moins des raisonnements classiques) que celui qu'André Weil avait eu le mérite d'atteindre antérieurement par une voie tout à fait différente en introduisant les espaces dits à structure uniforme. Ces derniers étaient d'ailleurs plus généraux que les nôtres. Mais Colmez et Appert ont montré qu'en remplaçant nos écarts ordonnés par des écarts partiellement ordonnés, on atteint la même généralité, en même temps qu'on s'éloigne des espaces utilisables.

- En Analyse générale, nous avons pu montrer (190) qu'une définition, due à M. Hadamard, de la différentielle d'une fonction ordinaire de deux variables numériques, coïncide dans ce cas avec notre définition précédente (101), qu'on peut l'étendre aux fonctionnelles, mais que dans ce cas elle devient plus générale que la nôtre (MM. Michal et Ky Fan l'ont encore généralisée au cas des transformations d'espaces vectoriels distanciés entre eux). D'autre part, notre première définition, valable pour les espaces vectoriels distanciés a été étendue par Michal aux groupes topologiques abéliens (voir 259).

- Passant à la philosophie des sciences, nous avons étudié entre autres les fondements du calcul des Probabilités. Dans (202, 203) nous avons exposé nos objections à la définition de la probabilité comme limite d'une fréquence. Dans (273) et (236), nous avons proposé, non pas une définition de la probabilité, mais une interprétation de la probabilité telle qu'elle est utilisée dans une théorie axiomatique. Nous proposons de considérer la probabilité d'un évènement E dans une catégorie d'épreuves C comme une grandeur physique fonction de E et de C et dont une mesure approchée est fournie par la fréquence de E dans un grand nombre d'épreuves de C.

Dans (236), nous avons présenté une objection qui nous paraît importante à ceux qui considèrent la probabilité de E comme une mesure subjective de la vraisemblance de la réalisation de E. Pour la plupart des subjectivistes comme des objectivistes, nous agissons comme si un événement de probabilité assez petite ne devait pas se produire. Alors d'après le théorème de Bernoulli démontré en théorie axiomatique, nous devrions aussi agir comme si la probabilité petite ou grande d'un événement était approchée par la fréquence de cet évènement dans un grand nombre d'épreuves. De sorte que l'interprétation subjective est ramenée à l'interprétation objective.

On peut encore dire : nous avons bien le droit - et même nous en usons parfois à la légère - d'attribuer à la vraisemblance subjective de la future réalisation d'un événement, une valeur numérique que nous appelons probabilité. Mais si nous voulons en faire la base de nos actions, il arrivera, si notre évaluation numérique est fréquemment et notablement distincte des fréquences correspondantes, que nous agirons mal, par exemple, nous mettrons le doigt dans le feu. Rectifiant peu à peu notre évaluation en conséquence des erreurs passées, nous arriverons à des évaluations subjectives voisines des fréquences, c'est-à-dire, en fait, objectives.

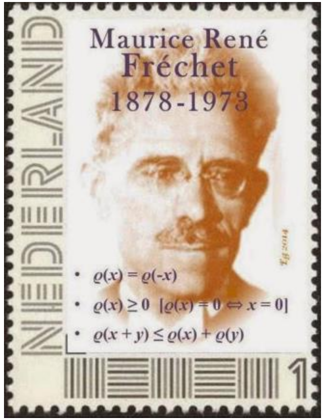
---

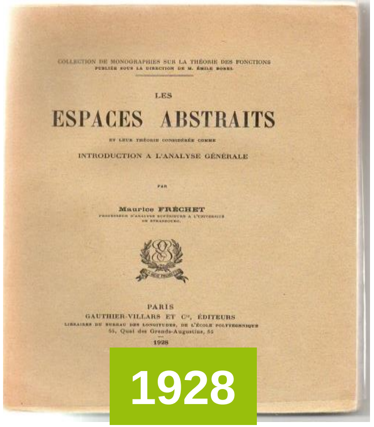
(1) A notre sens, c'est-à-dire que sa différence seconde soit l'élément neutre.

Statistiques dans les espaces « abstraits (métrique) » de Fréchet

Maurice René Fréchet

1948 (Annales de l'IHP)
Les éléments aléatoires de nature quelconque dans un espace distancié
Extension des Probabilités/Statistiques dans des espaces métriques




COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS
PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL

LES
ESPACES ABSTRAITS
ET LEUR THÉORIE CONSIDÉRÉE COMME
INTRODUCTION A L'ANALYSE GÉNÉRALE

PAR

Maurice FRÉCHET
PROFESSEUR D'ANALYSE SUPÉRIEURE A L'UNIVERSITÉ DE STRASBOURG.

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
55, Quai des Grands-Augustins, 55
1928

1928

Statistiques dans les espaces « abstraits (métrique) » de Fréchet

Les éléments aléatoires de nature quelconque dans un espace distancié

par

Maurice FRÉCHET.

PRÉFACE.

On trouvera dès l'*Introduction* qui suit, la signification du titre de ce Mémoire, dont une Table des matières figure à la page 309. Nous nous contenterons ici de dire en deux mots qu'il constitue la mise au point de certains des cours que nous avons faits à la Sorbonne en 1945 et en 1946. Ce travail n'est qu'un des résultats des grands efforts que nous avons accomplis, *tant du côté statistique et expérimental*, que du côté théorique, pour jeter les bases d'un Chapitre entièrement nouveau, et que nous croyons assuré d'un grand avenir, du Calcul des Probabilités. Dans le présent Mémoire, nous croyons avoir montré quelle formidable extension de ce Calcul résulte de la simple introduction de la notion de distance de deux éléments aléatoires.

Dans un prochain article, nous étudierons de même l'intégration et la différenciation « stochastiques » et à cette fin il nous sera nécessaire d'adjoindre à cette notion de distance, celle du vecteur abstrait correspondant.

On pourrait nous reprocher d'avoir limité nos applications dans ce qui suit aux cas déjà abordés des nombres aléatoires, des vecteurs aléatoires et des fonctions aléatoires. Mais c'est qu'il s'agissait avant tout de montrer que notre théorie générale était susceptible d'application

VI

LES ESPACES ABSTRAITS ET LEUR UTILITÉ EN STATISTIQUE THÉORIQUE ET MÊME EN STATISTIQUE APPLIQUÉE (1)

INTRODUCTION. — L'objet principal des recherches en calcul des probabilités et en statistique mathématique a été jusqu'ici le nombre aléatoire. Relégué dans les chapitres des probabilités géométriques apparaissait aussi le point aléatoire sur la droite, dans le plan ou dans l'espace à trois dimensions. A une époque plus récente, on a dû considérer des éléments aléatoires plus généraux, déterminés chacun par un nombre fini fixe, *s*, de paramètres numériques aléatoires. On a trouvé ensuite plus simple et plus suggestif de considérer ces systèmes comme des points aléatoires choisis au hasard dans un (ainsi nommé) espace à *s* dimensions. Enfin, dans ces dernières années, s'est introduite la théorie des séries aléatoires et des fonctions aléatoires. N'y a-t-il pas des traits communs à ces études successives de catégories d'éléments aléatoires de natures diverses? Et même, n'y aurait-il pas une théorie commune non seulement à ces éléments aléatoires particuliers, mais encore à tous les éléments aléatoires, quelle que soit leur nature; c'est-à-dire une théorie applicable aux éléments aléatoires abstraits? Nous nous proposons dans cette communication d'apporter à ces questions une réponse affirmative et d'en souligner d'autre part le côté pratique.

Les éléments abstraits. — Nous savons tous ce qu'on entend en disant de deux ensembles d'éléments que le nombre d'éléments du premier est plus grand que le nombre d'éléments du second. Que ces deux ensembles soient deux tas de pommes ou deux troupes de soldats, l'assertion se vérifiera de la même façon. Il en sera de même pour la somme des nombres des éléments de ces ensembles; ce sera le nombre des éléments de la réunion de ces ensembles. Autrement dit, on sait, et cela depuis des siècles, faire dans l'arithmétique élémentaire des raisonnements sur des ensembles d'éléments qui sont indépendants de la nature de ces éléments. Autrement dit, on sait raisonner sur des ensembles abstraits, c'est-à-dire sur des ensembles d'éléments abstraits. Et ici, élément abstrait n'est pas pris dans un sens mystérieux et métaphysique. Pour nous, un élément abstrait est un élément dont on ne connait pas la nature, ou plus généralement dont la nature, inconnue ou *même connue*, n'intervient pas dans nos raisonnements.

Nous venons de montrer dans l'arithmétique élémentaire une branche très ancienne des mathématiques qui raisonne souvent sur des éléments concrets pour se mettre à la portée des enfants, mais dont tous les raisonnements sont applicables à des éléments abstraits. Il n'y aura donc pas à s'effrayer si d'autres chapitres des mathématiques s'adressent à des éléments abstraits, ni à déclarer d'avance que cela est perdre son temps et encore moins à croire qu'il est impossible de raisonner sur des éléments dont on ne sait exactement ce qu'ils sont.

(1) Communication présentée à la séance du 21 mai 1947.

LES ESPACES ABSTRAITS TOPOLOGIQUEMENT AFFINES.

PAR

MAURICE FRÉCHET

à STRASBOURG.

Table des Matières.

4—26280. *Acta mathematica.* 47. Imprimé le 16 septembre 1925.

Statistiques dans les espaces « abstraits (métrique) » de Fréchet

M. Fréchet, “les éléments aléatoires de nature quelconque dans un espace distancié”, Annales de l’IHP, t.10, n°4, p.215-310, 1948 (voir sur Numdam)

- Il constitue la mise au point de certains des cours que nous avons fait à la Sorbonne en 1945 et 46
- Formidable extension du Calcul [des probabilités qui] résulte **de la simple introduction de la notion de distance de deux éléments aléatoires**
- La nature, la science et la technique offrent de nombreux exemples d’**éléments aléatoires qui ne sont, ni des nombres, ni des séries, ni des vecteurs, ni des fonctions**. Telles sont par exemple, **la forme d’un fil jeté au hasard sur une table, la forme d’un oeuf pris au hasard dans un panier d’oeufs**. On a ainsi une **courbe aléatoire, une surface aléatoire**. On peut aussi considérer d’autres éléments mathématiques aléatoires : **des transformations aléatoires de courbe en courbe**.
- Il paraît certain que l’urbanisme conduira à étudier des éléments aléatoires tels **que la forme d’une ville prise au hasard**, vérifier par exemple, d’une manière scientifique l’hypothèse de la tendance au développement des villes vers l’Ouest.
- Parmi les premières notions à généraliser figurent celles de loi de probabilité, de valeurs typiques (moyenne, équiprobable, etc.), de dispersion, de convergence stochastique, que nous allons d’abord examiner.
- Nous indiquerons plus loin en Note additionnelle, un moyen très général d’étendre la notion de **fonction de répartition à des éléments aléatoires de nature quelconque.**

THALES

Statistiques dans les espaces « abstraits (métrique) » de Fréchet Chapeau bas de la maison Stools

- Nous avons entrepris une étude expérimentale de quelques exemples particuliers. Ceux-ci sont actuellement : **la forme aléatoire d'un fil jeté sur une table**, **la forme aléatoire d'une section horizontale (prise à un niveau anatomique déterminé) d'un crâne humain** choisi au hasard.
- Pour ce second exemple, notre choix s'est porté sur deux collections de contours obtenus au "conformateur" d'une part sur des personnes vivantes (mais anonymes), **contours fournis gracieusement par la grande maison parisienne de chapellerie Sools**, d'autre part sur une **collection ethnographique de crânes d'individus morts**, collection mise aimablement à notre disposition par M. Lester, Directeur du laboratoire d'Ethnographie.
- L'étude statistique d'une **collection de contours crâniens préhistoriques**.
- Les fonctions représentatives sont développées en série de Fourier et l'on procédera à une analyse statistique de ces séries. On déterminera les lois de fréquences des premiers coefficients pris isolément et l'on étudiera d'autre part leur corrélation au moyen de divers indices de corrélation et en particulier l'indice diagonal que nous avons défini récemment.
- **Le laboratoire de Calcul de l'Institut Henri Poincaré opérant sur deux analyseurs harmoniques.**
- Pour les fils, environ 120 coefficients (nous disposons de 100 de ces formes). **Pour les contours crâniens** dont les formes sont infiniment moins variées, nous nous sommes contentés de 12 harmoniques soient 25 coefficients pour chaque crâne.
- Développement en série de Fourier de l'équation en **coordonnées polaires d'un contour crânien**

Analyse des courbes aléatoires

De la l'analyse des courbes aléatoires à l'analyse harmonique

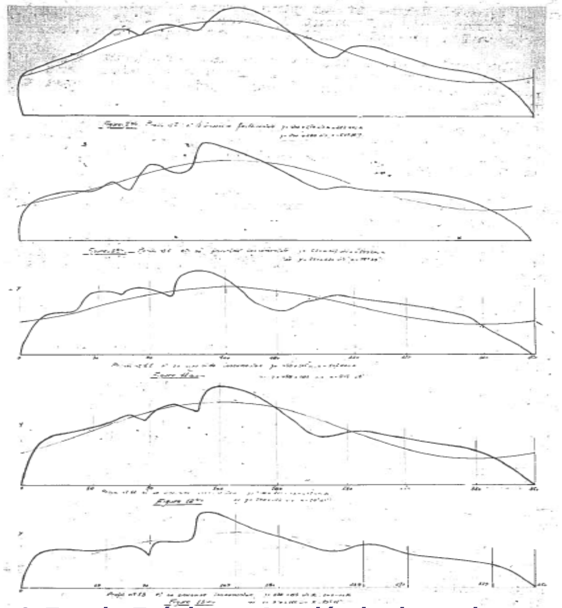
[A] Laurent Mazliak, Loic Petitgirard. Utiliser l'analyse harmonique pour "classer les races humaines". Le programme de recherche de Fernand Ozil au Centre de recherches scientifiques, industrielles et maritimes de Marseille (1941-1948). Philosophia Scientiae, 2023/1(27-1), pages 33 à 57, Éditions Kimé

- « C'est dans cet esprit que Fréchet entreprend **l'étude de courbes aléatoires, à partir de 1943**, en partant d'une expérience statistique destinée à obtenir la description probabiliste de la **forme d'une boucle de fil jetée au hasard sur une table. Son idée est de chercher la loi de probabilités de la forme à travers les lois des coefficients de Fourier obtenus par décomposition de la courbe polaire $\rho = f(\omega)$ représentant la forme du fil, f étant une fonction 2π périodique.** Fréchet fait envoyer à Duffieux une série de graphes de fonctions f déduites de contours obtenus expérimentalement, tracés sur papier graphique et lui demande d'en réaliser l'analyse harmonique. Une longue lettre de Duffieux datée du 12 mai 1943 montre que celui-ci prend au sérieux le travail demandé, mais en souligne l'extrême difficulté pour des questions d'échelle et de précision. Fréchet de ce fait cherche à obtenir des contours beaucoup plus calibrés que ceux fournis par l'expérience du fil et en 1946 trouve deux sources possibles. **L'une est une série de contours de têtes fournie par la maison Sools, une grande maison de chapellerie de Paris, l'autre une série de contours de crânes mélanésiens obtenue par diagraphie, qui pouvait être mise à sa disposition par Paul Lester (1891-1948), sous-directeur du Laboratoire d'anthropologie du musée de l'Homme.** Ce dernier lui écrit cependant le 20 avril 1946, que si la réalisation du projet est techniquement aisée, le manque de personnel pour effectuer le travail risque d'allonger les délais. »
- **Laurent-Duhamel, Marie-Jeanne [1953], Étude statistique de contours crâniens considérés comme courbes aléatoires, Publications de l'Institut de statistique de l'Université de Paris, 2(3), 27–54***
- **Maurice Fréchet, Courbes aléatoires, Publications de l'Institut de statistique de l'Université de Paris, 4, 11–20.**

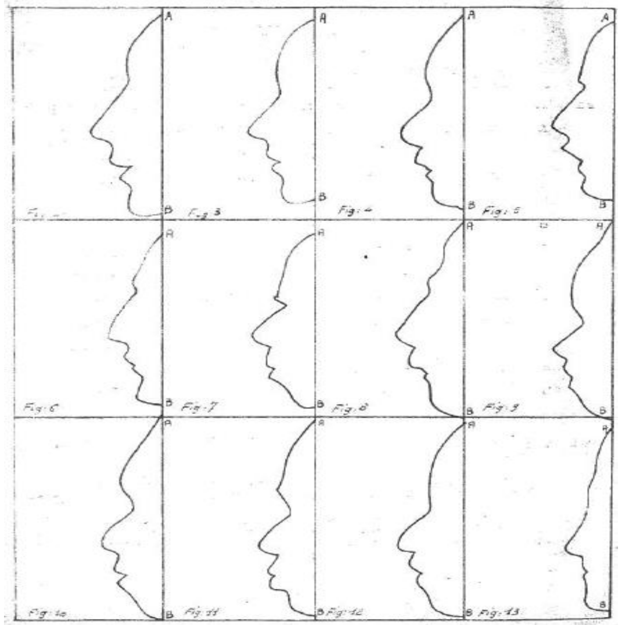
Fonds Fréchet : Archives de l'Académie des Sciences

Collaboration de Maurice Fréchet avec Fernand Ozil:

- Analyse harmonique des profils humains. Les tableaux de M. Ozil ne correspondent pour des formes en fait assez compliqués qu'à 9 harmoniques et représentent seulement la moitié expressive du profil, c'est à dire une fonction non périodique.



© *Fonds Fréchet – Académie des sciences*



« **Fréchet entre alors en contact avec Canac qui lui envoie les différentes notes d'Ozil, puis avec Ozil lui-même afin de prolonger les études de ce dernier en tentant d'obtenir des lois statistiques pour les coefficients de Fourier qu'il avait calculés à partir des profils.[A]** »

« **la séparation des courbes en nègres et non-nègres ne semble pas donner des courbes normales sauf peut-être (?) pour φ2 (nègres)**, mais les données sont assez groupées et devant partir demain, je n'ai pas le temps de tester l'ajustement de ces courbes à une loi de répartition donnée. Je vous les communique cependant sans en connaître la valeur exacte quant aux conclusions à en tirer. » Fréchet [A]

« L'activité de Fréchet pendant l'Occupation a été étudiée dans différents travaux d'où il ressort en particulier qu'il joue un rôle très important de relais des recherches de différents mathématiciens frappés par les mesures antisémites de Vichy, et notamment Paul Lévy [cf.Barbut, Locker et al. 2014, Mazliak 2018b]

[A] Laurent Mazliak, Loic Petitgirard. Utiliser l'analyse harmonique pour "classer les races humaines". Le programme de recherche de Fernand Ozil au Centre de recherches scientifiques, industrielles et maritimes de Marseille (1941-1948). Philosophia Scientiae, 2023/1(27-1), p.33 à 57, Édi. Kimé

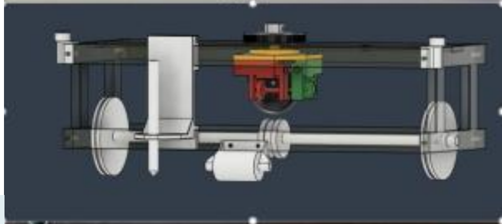
Les collaborations de Maurice Fréchet avec Fernand Ozil

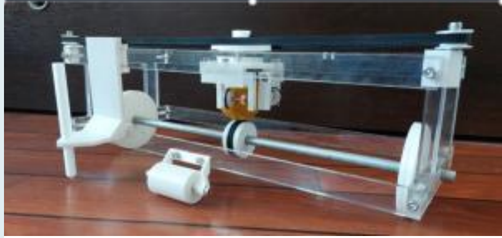
Fernand Ozil [A]

- *« Parmi les faits d'armes mathématiques, dans les années 1931-1932, Ozil a participé à* ***l'analyse par décomposition en série de Fourier des courbes d'enregistrement de bruits d'avion.*** *Ozil s'inscrit à ce moment-là comme un acteur, certes mineur, de la longue histoire de l'analyse harmonique et du traitement du signal. Ce sujet l'occupera sur le long terme.* ***Lorsque les méthodes dites « de Labrouste » sont rendues publiques, il sera chargé d'évaluer la pertinence de leur utilisation dans l'étude des bruits d'avions****, pour le ministère de l'Armement. Par une entrée mathématique, Ozil se retrouve embarqué dans* ***des recherches typiques du LCET en acoustique et systèmes de repérages de différentes natures****. »*

Analyseur harmonique Coradi à trois intégrateurs de base 360 mm. ©Lebée - Inventaire général /École polytechnique

L'analyseur Coradi est une machine analogique mécanique de calcul de coefficients de Fourier du tracé d'une courbe (par exemple, enregistrements de marégraphes, sismographes, diagrammes de machines à vapeur, tracés d'oscillations électriques, de vibrations acoustiques, etc.). Le calcul des coefficients de Fourier repose sur une double opération : un produit de la fonction à étudier par les fonctions cosinus ou sinus, puis une intégration. La machine imaginée par Olaus Henrici (1840-1918) au début du xxe siècle, fabriquée par le constructeur suisse Coradi, utilise des principes mécaniques et géométriques pour réaliser ces deux opérations. À l'aide de combinaisons de boules, cylindres, câbles et poulies, une telle machine permet d'estimer les coefficients par des mesures physiques : l'opérateur doit suivre le tracé de la courbe avec le pointeur de la machine et lire les résultats sur des roue-compteurs. Ce sont les méthodes les plus courantes en la matière avant l'arrivée des ordinateurs dans les années 1960.

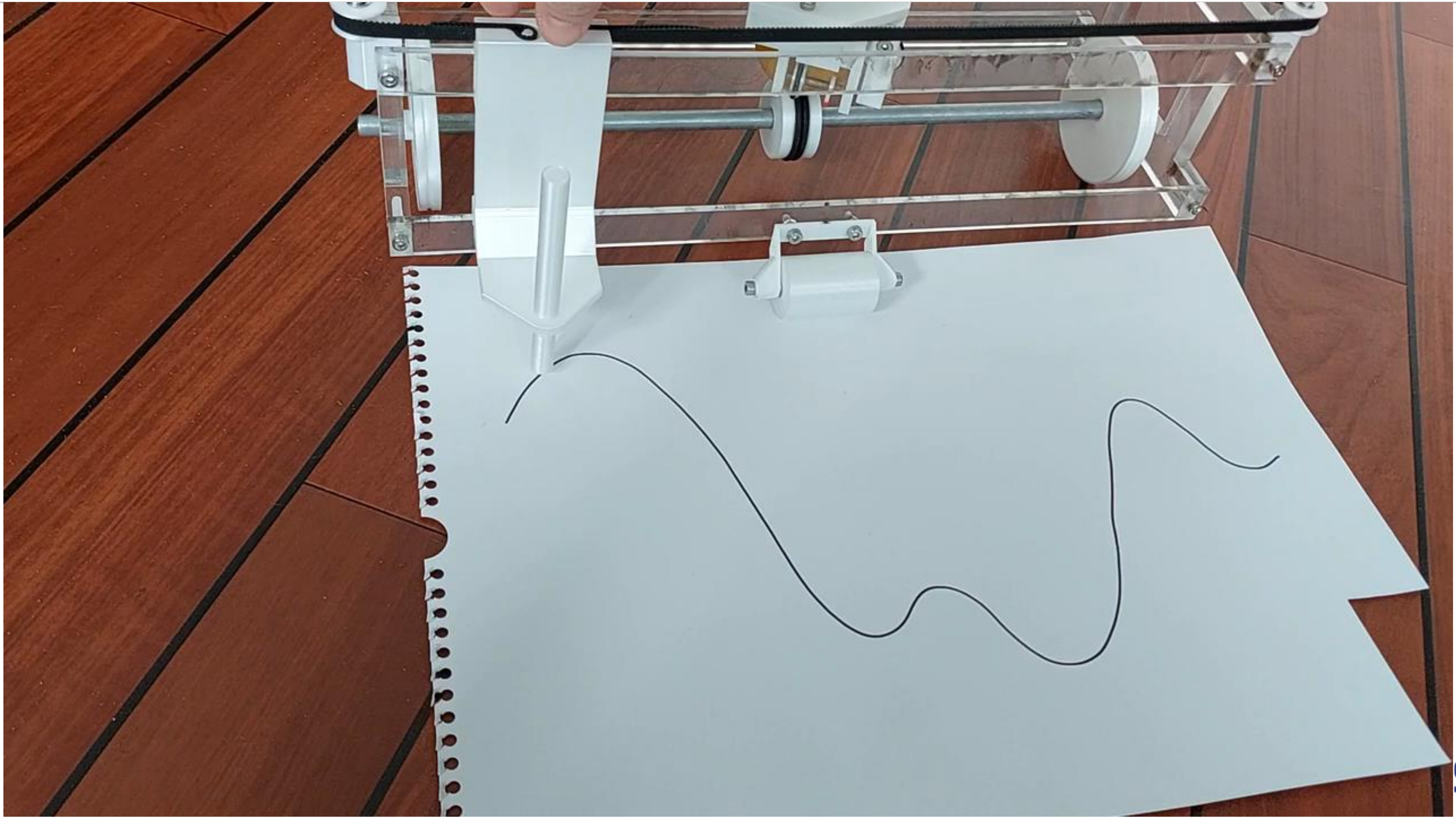




https://portail.polytechnique.edu/musx/fr/lobjet-davril-2023-lanalyseur-coradi

[A] Laurent Mazliak, Loic Petitgirard. Utiliser l'analyse harmonique pour "classer les races humaines". Le programme de recherche de Fernand Ozil au Centre de recherches scientifiques, industrielles et maritimes de Marseille (1941-1948). Philosophia Scientiae, 2023/1(27-1), pages 33 à 57, Éditions Kimé

Analyseur harmonique Coradi à trois intégrateurs (Musée de l'X)



Article de Fréchet « Courbes Aléatoires » 1955

COURBES ALÉATOIRES

par

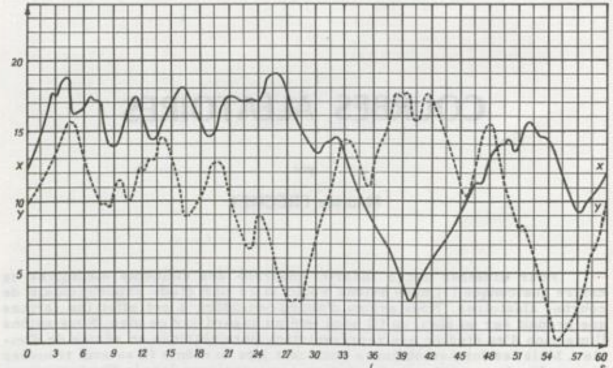
Maurice FRÉCHET

Pour illustrer notre théorie générale des éléments aléatoires de nature quelconque (1) nous avions voulu faire une étude expérimentale de courbes aléatoires. Nous avions d'abord considéré à cet effet les formes que prenait sur un plan, un fil noué jeté au hasard sur ce plan. Nous avions l'intention d'en étudier une représentation paramètrique en séries de Fourier. Mais les formes obtenues pour cent jets du même fil se sont trouvées si compliquées, que le nombre de termes nécessaires dans le développement a dû dépasser 60. Il en résultait des calculs si longs que nous n'avons pu analyser ainsi les 100 courbes.

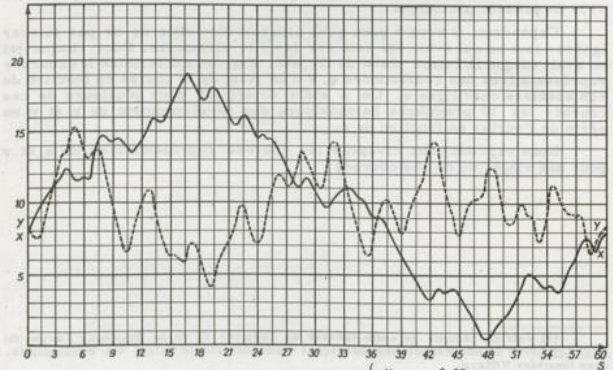
Nous avons donc momentanément abandonné cet essai et nous avons considéré des formes beaucoup plus simples, celles de contours craniens, pour lesquels une douzaine d'harmoniques assuraient une approximation suffisante. Mme LAURENT-DUHAMEL a bien voulu procéder à l'étude de ces contours et les résultats de son travail ont paru dans le vol.II., fasc.3 1953 du présent périodique.

Cependant, il nous a paru qu'il pourrait être utile de ne pas laisser ignorer tout ce qui avait été fait sur les fils aléatoires. Pour chaque jet on avait calqué la forme plane du fil jeté. Puis on a déterminé les courbes représentatives des coordonnées x, y d'un point de la courbe en fonction de son abscisse curviligne s. On a enfin déterminé pour plusieurs de ces courbes les 30 premières harmoniques des développement de x et y en série de Fourier en fonction de s.

Nous reproduisons ci-après les courbes représentatives de x et y pour une vingtaine de ces courbes.



Courbe 1 Echelles { x → 0,7 ; y → 1 }



Courbe 2 Echelles { x → 0,65 ; y → 1 }

Thèse d'André Blanc-Lapierre sur les « fonctions aléatoires » 1945
Président du Jury: Maurice Fréchet

Série A, N° 2115
N° d'ordre : 2984

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

André BLANC-LAPIERRE
Ancien Élève de l'École Normale Supérieure
Ingénieur au Centre National d'Etudes des Télecommunications

1re THÈSE. — Sur certaines fonctions aléatoires stationnaires. Application a l'étude des fluctuations dues a la structure électronique de l'électricité.

2e THÈSE. — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 5 Novembre 1945 devant la Commission d'examen.

MM. M. FRÉCHET.... *Président.*
G. DARMOIS.... *Examinateurs.*
G. VALIRON....

II. — LES FONCTIONS ALÉATOIRES STATIONNAIRES LAPLACIENNES (1)

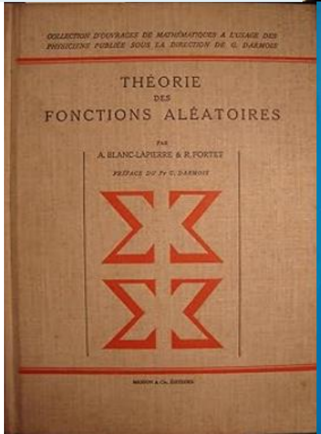
L'étude de la fonction aléatoire $x(t)$, pour les très grandes valeurs de la densité ρ, nous a conduits à considérer un processus aléatoire caractérisé par la propriété suivante : « étant donné un nombre quelconque, mais fini, K, de valeurs déterminées $t_1, t_2, \ldots, t_K$ du temps t, le logarithme de la fonction caractéristique $\Phi\{u_1, u_2, \ldots, u_K\}$ associée à l'ensemble des variables aléatoires liées $x(t_1), x(t_2) \ldots x(t_K)$ est égal à :

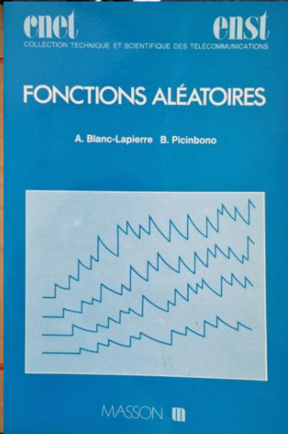
$$\text{Log}\,\Phi = -\frac{1}{2}\sum_{k}\sum_{k'} u_k u_{k'}\,\mathcal{C}(t_k - t_{k'}). \qquad (156)$$

TABLE DES MATIÈRES

Ouverture d'un colloque GRETSI:
A. Blanc-Lapierre, H. Mermoz, P. Aigrain, B. Picinbono

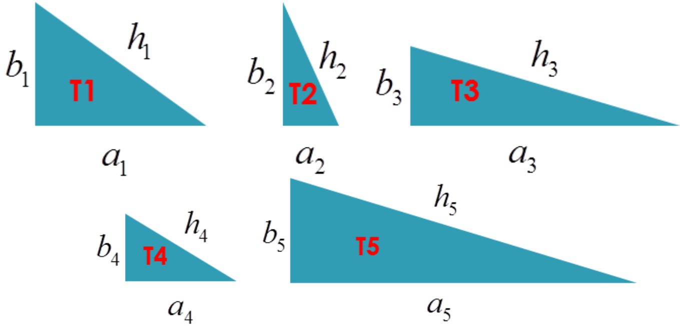
André Blanc-Lapierre fondateur de l'Ecole Française de traitement statistique du signal - GRETSI





Antoine-Augustin Cournot et le triangle rectangle moyen
Joseph Bertrand et l'homme moyen

- Lorsqu'on applique la détermination des moyennes aux diverse parties d'un système compliqué, il faut bien prendre garde que ces valeurs moyennes peuvent ne pas se convenir : **en sorte que l'état du système, dans lequel tous les éléments prendraient à la fois les valeurs moyennes déterminées séparément pour chacun d'eux, serait un état impossible.**
- Si, par exemple, **un triangle est assujetti à rester rectangle** pendant que ses côtés varient, il y aura une valeur moyenne pour chacun des trois côtés; mais ces trois moyennes, prises ensemble, ne conviendront pas à un triangle rectangle, ou ne satisferont pas à cette condition si connue, que le carré fait sur l'hypoténuse égale à la somme des carrés fait sur les deux côtés de l'angle droit.
- **L'homme moyen**: Par un système de moyennes tirées de la mesure de la taille, du poids, des forces, etc., sur des individus en grand nombre. L'homme moyen ainsi défini, bien loin d'être en quelque sorte le type de l'espèce, serait tout simplement un impossible



$$\boxed{\left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5}\right)^2+\left(\frac{b_1+b_2+b_3+b_4+b_5}{5}\right)^2\neq\left(\frac{h_1+h_2+h_3+h_4+h_5}{5}\right)^2}$$

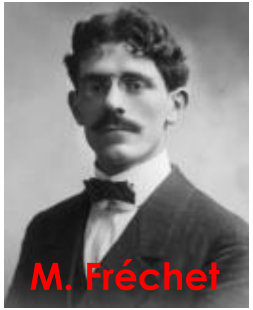
Le poids d'un individu est grosso modo proportionnel à son volume, il varie comme le cube de la taille; or la moyenne des cubes n'est évidemment pas le cube de la moyenne – **Joseph Bertrand**

Moyenne/Médiane: Barycentre de Fréchet dans l'espace métrique

Illustrons l'idée du barycentre de Fréchet pour des « triangles rectangles »

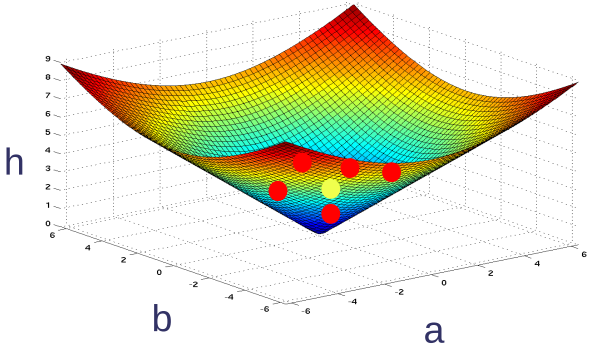
- Considérons N triangles rectangles $\{a_i,b_i,h_i\}$, on cherche le « triangle median rectangle »: La solution est le barycentre « géodésique » de Fréchet, qui minimise la somme des distances géodésiques à tous les triangles rectangles

$$\{A,B,H\} = \arg \underset{\{A,B,H\}}{Min} \sum_{i=1}^{N} d^{\,p}_{geodesique}(\{a_i,b_i,h_i\},\{A,B,H\})$$

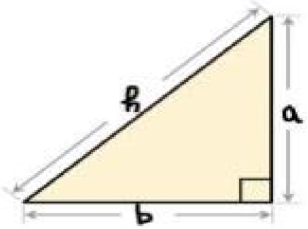


p=2 : Moyenne, p=1 Median

$$h = \sqrt{a^2 + b^2}$$

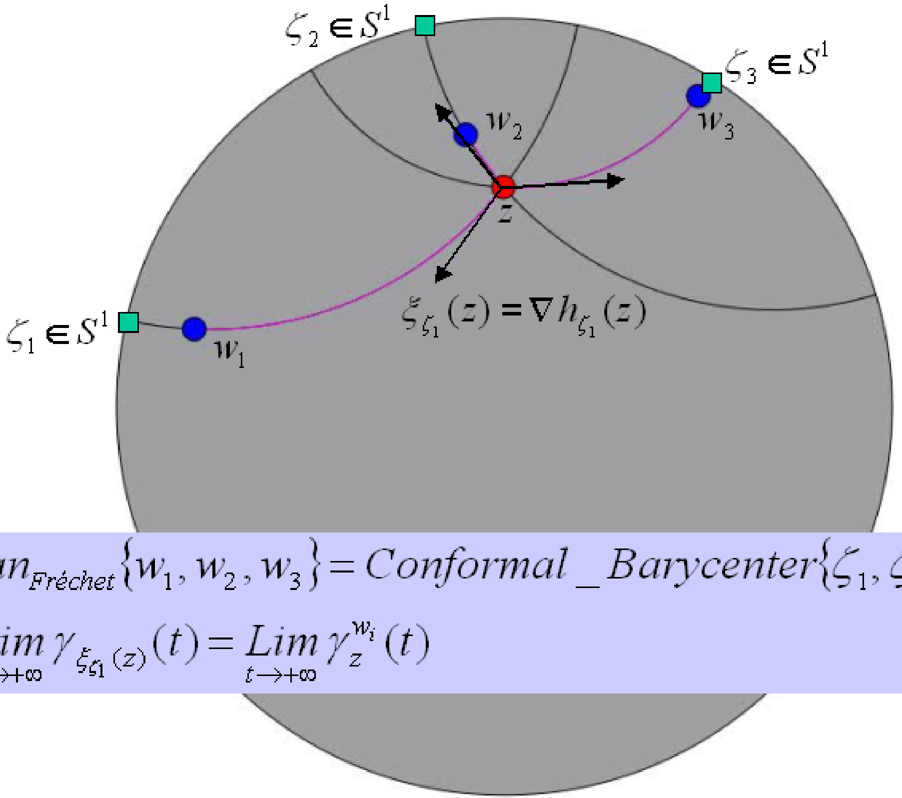


- **Les paramètres d'un triangle *{a,b,h}* rectangle sont contraints par la l'équation de Pythagore $h^2=a^2+b^2$.**
- **Cette contrainte se « déploie » en un cône convexe.**
- **1 triangle rectangle est représenté par 1 point sur la le cone convexe**



$$h = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Barycentre Médian de Fréchet dans le disque de Poincaré = Barycentre de Busemann d'après Douady-Earle [F. Barbaresco, 2013]



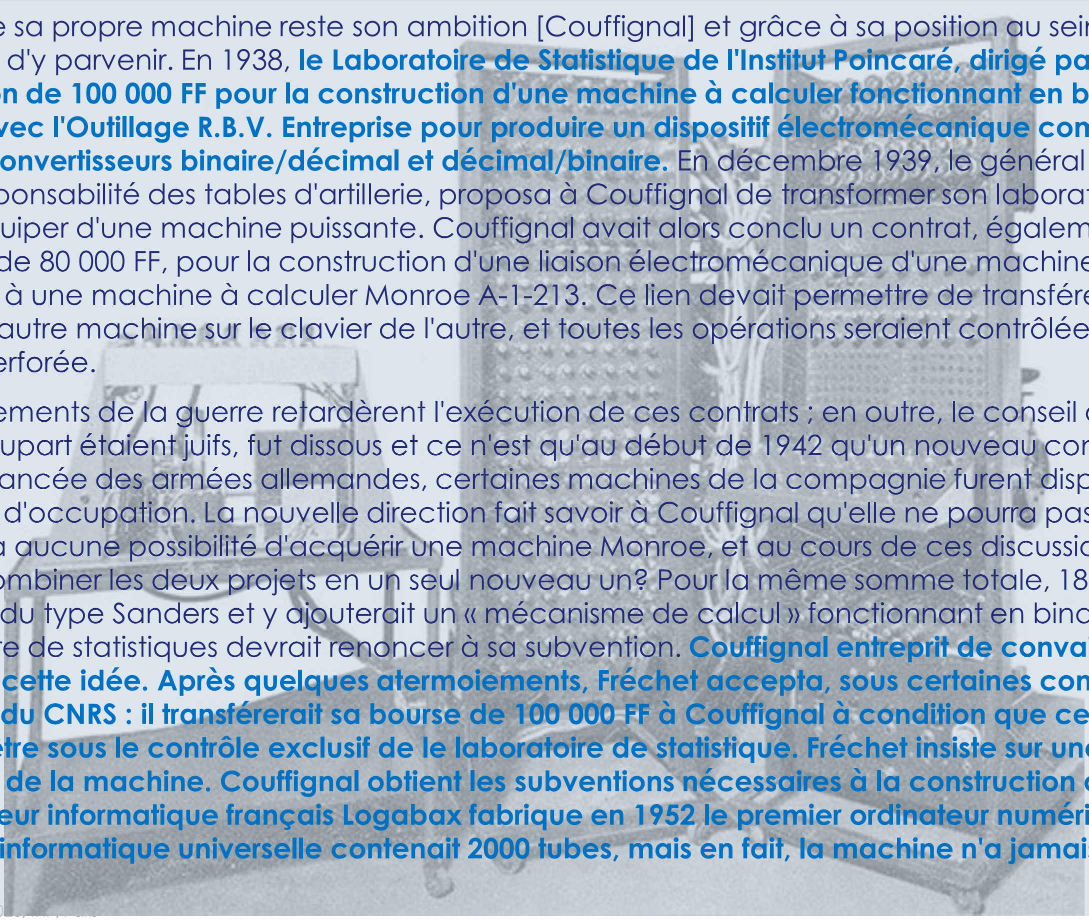
$$Median_{Fréchet}\{w_1, w_2, w_3\} = Conformal\_Barycenter\{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\}$$

$$\zeta_i = \underset{t \to +\infty}{Lim}\, \gamma_{\xi_{\zeta_1}(z)}(t) = \underset{t \to +\infty}{Lim}\, \gamma_z^{w_i}(t)$$

Barbaresco, F. (2013). Information Geometry of Covariance Matrix: Cartan-Siegel Homogeneous Bounded Domains, Mostow/Berger Fibration and Fréchet Median. In: Nielsen, F., Bhatia, R. (eds) Matrix Information Geometry. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-30232-9_9

Adrien Douady and Clifford J Earle. Conformally natural extension of homeomorphisms of the circle. Acta Mathematica, 157(1-2):23–48, 1986

Machine à calculer à l'IHP



- Construire sa propre machine reste son ambition [Couffignal] et grâce à sa position au sein du CNRS, il entrevoit désormais une possibilité d'y parvenir. En 1938, **le Laboratoire de Statistique de l'Institut Poincaré, dirigé par Borel et Fréchet, avait obtenu une subvention de 100 000 FF pour la construction d'une machine à calculer fonctionnant en binaire, et était allé jusqu'à signer un contrat avec l'Outillage R.B.V. Entreprise pour produire un dispositif électromécanique comprenant un additionneur de type Ellis et deux convertisseurs binaire/décimal et décimal/binaire.** En décembre 1939, le général Desmazières, qui avait récemment pris la responsabilité des tables d'artillerie, proposa à Couffignal de transformer son laboratoire en centre de calculs d'artillerie et de l'équiper d'une machine puissante. Couffignal avait alors conclu un contrat, également avec Outillage R.B.V., d'un montant de 80 000 FF, pour la construction d'une liaison électromécanique d'une machine comptable à 10 colonnes Sanders-Octoplex à une machine à calculer Monroe A-1-213. Ce lien devait permettre de transférer n'importe quel numéro produit par l'une ou l'autre machine sur le clavier de l'autre, et toutes les opérations seraient contrôlées automatiquement au moyen d'une bande perforée.
- Les événements de la guerre retardèrent l'exécution de ces contrats ; en outre, le conseil d'administration d'Outillage R.B.V., dont la plupart étaient juifs, fut dissous et ce n'est qu'au début de 1942 qu'un nouveau conseil d'administration fut constitué. Avec l'avancée des armées allemandes, certaines machines de la compagnie furent dispersées et d'autres furent saisies par les forces d'occupation. La nouvelle direction fait savoir à Couffignal qu'elle ne pourra pas honorer les contrats de 1938 et 1939 car il n'y a aucune possibilité d'acquérir une machine Monroe, et au cours de ces discussions une idée se développe : pourquoi ne pas combiner les deux projets en un seul nouveau un? Pour la même somme totale, 180 000 FF, l'entreprise construirait une machine du type Sanders et y ajouterait un « mécanisme de calcul » fonctionnant en binaire. Pour que cela soit possible, le laboratoire de statistiques devrait renoncer à sa subvention. **Couffignal entreprit de convaincre son directeur, Fréchet, du bien-fondé de cette idée. Après quelques atermoiements, Fréchet accepta, sous certaines conditions qu'il présenta à Jacob, le directeur du CNRS : il transférerait sa bourse de 100 000 FF à Couffignal à condition que celui-ci lui garantisse les deux tiers du temps d'être sous le contrôle exclusif de le laboratoire de statistique. Fréchet insiste sur une comptabilité rigoureuse du temps de travail de la machine. Couffignal obtient les subventions nécessaires à la construction de sa machine. Il conçoit et le constructeur informatique français Logabax fabrique en 1952 le premier ordinateur numérique électronique français. Cette machine informatique universelle contenait 2000 tubes, mais en fait, la machine n'a jamais été terminée ni mise en production.**

THALES

Transport Optimal: Distance de Fréchet-Levy versus distance de Wasserstein (4ème distance oubliée)

Transport Optimal: Distance de Fréchet-Levy versus distance de Wasserstein (4ème distance oubliée)

Distance de Fréchet-Levy

- En 1957, Maurice René Fréchet introduisit une distance, basée sur un papier de Paul Levy de 1950

ACADÉMIE DES SCIENCES

SÉANCE DU LUNDI 4 FÉVRIER 1957.

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Sur la distance de deux lois de probabilité.*

Note de M. **Maurice Fréchet**.

Une formule explicite et simple est donnée pour représenter la distance de deux lois de probabilités quand on utilise la première des trois définitions de cette distance proposées par Paul Lévy. Une quatrième définition est proposée.

Nous prendrons ici, pour cette distance, l'écart quadratique moyen de X et de Y. En appelant $F(x)$, $G(y)$, $H(x, y)$ les fonctions de répartition respectives de X, de Y et du couple (X, Y), cet écart quadratique moyen D_H a pour carré

$$D_H^2 = \mathfrak{M}_H(X-Y)^2 = \iint_P (x-y)^2\, d_x d_y\, H(x, y),$$

$$d^2(F,G) = \underset{X,Y}{Inf}\; E\left[\left|X-Y\right|^2\right] = \iint (x-y)^2 d_x d_y H(x,y)$$

Théorie du transport optimal : distance de Wasserstein

Distance de Wasserstein

- Contexte de la théorie du transport optimal

$$W_n(\mu,\nu)=\left(\underset{\pi\in\Pi(\mu,\nu)}{Inf}\int_{\wp} d(x,y)^n d\pi(x,y)\right)^{1/n}$$

$$W_n(\mu,\nu)= Inf\left\{\left(E\left[d(X,Y)^n\right]\right)^{1/n}, law(X)=\mu, law(Y)=\nu\right\}$$

Cas particulier de la distance de Fréchet-Wasserstein

- Case *n = 1*

$$W_1(\mu,\nu)=d(P,Q)=\underset{X,Y}{Inf}\ E\left[\left|X-Y\right|\right]$$

- Case *n*=2

$$W_2(\mu,\nu)=d(P,Q)=\underset{X,Y}{Inf}\ E\left[\left|X-Y\right|^2\right]$$

Distance de Wasserstein pour des lois multivariées gaussiennes

- Distance de Fréchet-Wasserstein

$$E\left[\|X-Y\|^2\right]=E\left[Tr\left((X-Y)^+(X-Y)\right)\right]$$

$$E\left[\|X-Y\|^2\right]=|E(X)-E(Y)|^2+Tr[R_X]+Tr[R_Y]-2Tr[R_{X,Y}]$$

- Preuve
  - Si on pose $W=\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}\Rightarrow R_W=\begin{bmatrix}R_X & \Psi\\ \Psi^+ & R_Y\end{bmatrix}\geq 0$

$$\underset{R_X-\Psi R_Y^{-1}\Psi^+\geq 0}{Sup}\; Tr\left(\Psi+\Psi^+\right)\Rightarrow \Psi=R_X^{1/2}\left(R_X^{1/2}.R_Y.R_X^{1/2}\right)^{1/2}R_X^{-1/2}$$

  - La solution est donnée par :

$$Tr\left(\Psi+\Psi^+\right)=2.Tr\left[\left(R_X^{1/2}.R_Y.R_X^{1/2}\right)^{1/2}\right]$$

$$Y=R_X^{1/2}\left(R_X^{1/2}.R_Y.R_X^{1/2}\right)^{-1/2}R_X^{1/2}.X$$

Transport Optimal: Distance de Fréchet-Levy versus de Wasserstein

Distance de Fréchet-Levy

- 1957 CRAS: publication de Fréchet:

Paul Lévy a proposé ([1]) trois définitions de la distance de deux lois de probabilité L, L′.

Nous examinerons ici la première, qui est la plus intuitive et qui, contrairement à ce que l'on aurait pu attendre, conduit à des formules très simples.

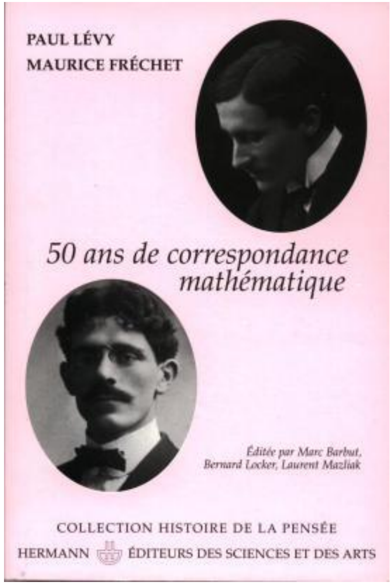
Selon cette première définition, la distance (L, L′) de ces deux lois est la borne inférieure de la « distance globale »

([X], [Y])

de deux nombres aléatoires X, Y qui ont respectivement L et L′ comme lois de probabilités individuelles, quand la corrélation entre X et Y varie.

Il est clair que la distance (L, L′) va dépendre de la définition adoptée pour la distance globale de X et de Y.

C.R., 1957, 1er *Semestre*. (T. 244, N° 6.) 44



- Lettre de Paul Levy à Maurice Fréchet (2 vril 1958)
  - … J'ai ainsi pu apprécier ce que vous aviez fait, en prenant comme point de départ de votre mémoire ce que vous appelez ma première définition de la distance de deux lois de probabilité (en fait ce n'était pas la première). Vous l'avez d'ailleurs généralisée, en ce sens que je ne l'avais associée qu'à une de vos définitions de deux variables aléatoires. Et j'ai beaucoup admiré comment avec votre quatrième définition, vous arrivez à faire quelque chose de maniable d'une idée qui pour moi était surtout théorique, vu la difficulté de déterminer le minimum de la distance de deux variables aléatoires ayant les répartitions marginales données.

4ème distance de Fréchet-Levy oubliée

4ème distance de Fréchet-Levy

$$d^2(F,G)=\iint (x-y)^2 d_x d_y H_1(x,y)$$

with $H_1(x,y)=Min[F(x),G(y)]$

- Copules extrêmes de Fréchet

Nous pouvons, en effet, considérer $H(x, y)$ comme définissant un « tableau de corrélation » dont les « marges » sont définies par les fonctions $F(x)$, $G(y)$.

Or nous avons montré ([2]) que l'ensemble des fonctions $H(x, y)$ est identique à l'ensemble des fonctions de répartition dont les valeurs sont comprises entre deux d'entres elles, à savoir

$$(4)\qquad \boxed{\begin{cases} H_0(x, y) = \mathrm{Max}[F(x) + G(y) - 1, 0], \\ H_1(x, y) = \mathrm{Min}[F(x), G(y)]. \end{cases}}$$

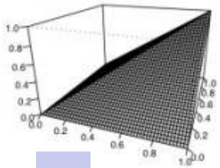
Poursuivant cette étude (d'ailleurs dans un autre but), Salvemini avait conjecturé que $\mathfrak{M}_H(X-Y)^2$ atteignait sa borne inférieure pour $H \equiv H_1$. Bass a énoncé ([3]) le résultat correspondant pour r_H dans le cas où X et Y sont bornés (et m'en a communiqué la démonstration). Un peu plus tard, Dall'Aglio ([4]) a validé la conjecture de Salvemini dans un cas plus général encore.

$H_1(x,y) \le H(x,y) \le H_0(x,y)$

with

$H_0(x,y) = Max[F(x)+G(y)-1,0]$

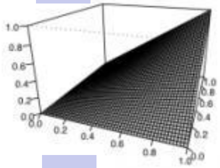
$H_1(x,y) = Min[F(x),G(y)]$



$H_0(x,y)$

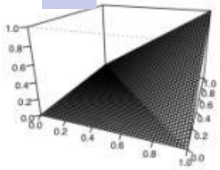
$\geq$

Copules extrêmes de Fréchet



$H(x,y)$

$\geq$



$H_1(x,y)$

- 4ème distance of Fréchet-Levy oubliée

Pour esquiver ces deux difficultés, nous allons proposer une quatrième définition. Si celle-ci les supprime, en effet, il faut reconnaître qu'elle est moins intuitive que celle de Lévy.

Nous poserons, *a priori*, sans explication

$$(L, L') = ([X], [Y])_{H_1}.$$

On peut en donner deux justifications. D'une part, elle coïncide avec celle de Lévy, au moins dans le cas, examiné plus haut, où la distance globale de X et Y est égale à leur écart quadratique moyen. D'autre part, on peut prouver que cette valeur de (L, L′) vérifie bien même dans le cas général les trois conditions imposées à la notion de distance.

THALES

Les prolongations vers les classes de Fréchet

G. Dall'Aglio (Université La Sapienza à Rome), « Fréchet Classes: the Beginnings », Advanced in Probability Distributions with Given Marginals Beyond the Copulas, Rome 1991, Kluwer

- Avec l'aide de Giuseppe Pompilj, G. Dall'Aglio a rencontré Maurice Fréchet, 80 ans, en 1956 à Rome, lors d'une visite à l'Istituto di Calcolo delle Probabilita. Dall'Aglio a rencontré une 2nd fois Fréchet à Paris et est en contact avec Paul Levy
- Dall'Aglio écrit : « Levy a également montré un certain intérêt pour les distributions avec des marges données. Dans une note de 1960, il se réfère à une formule de Poincaré pour une utilisation dans des distributions à n dimensions avec des marges données, sans développer l'idée »
  - Paul Levy, « Sur les conditions de compatibilité des données marginales relatives aux lois de probabilité » CRAS, t. 250 pp.2507-2509, 1960, note présentée par M. Jacques Hadamard

SÉANCE DU 4 AVRIL 1960. 2507

CALCUL DES PROBABILITÉS. — *Sur les conditions de compatibilité des données marginales relatives aux lois de probabilité.* Note de M. **Paul Lévy**, présentée par M. Jacques Hadamard.

L'auteur se propose d'attirer l'attention sur le fait qu'une formule de Poincaré résout le problème dans le cas de *n* variables aléatoires n'ayant chacune que deux valeurs possibles, lorsque toutes les lois marginales sont données. Il indique ensuite le principe d'une méthode permettant de ramener à ce cas le cas le plus général. Mais les calculs sont vite impraticables.

THALES

Géométrie de l'Information et la borne de Fréchet-Darmois

Métrique de Fisher et borne de Fréchet-Darmois

- **Borne de Cramer-Rao –Fréchet-Darmois définit comme inverse de la matrice d'information de Fisher $I(\theta)$:**

$$R_{\hat{\theta}} = E\left[\left(\theta-\hat{\theta}\right)\left(\theta-\hat{\theta}\right)^{+}\right] \geq I(\theta)^{-1} \qquad [I(\theta)]_{i,j} = -E\left[\frac{\partial^2 \log p_\theta(z)}{\partial\theta_i \partial\theta_j^*}\right]$$

- **Rao a proposé d'introduire une métrique invariante dans l'espace des paramètres des densité de probabilités (axiomatisée par N. Chentsov):**

$$ds_\theta^2 = Kullback\_Divergence\left(p_\theta(z), p_{\theta+d\theta}(z)\right)$$

$$ds_\theta^2 = -\int p_\theta(z)\log\frac{p_{\theta+d\theta}(z)}{p_\theta(z)}dz$$

$$w = W(\theta) \Rightarrow ds_w^2 = ds_\theta^2$$

$$ds_\theta^2 \underset{Taylor}{\approx} \sum_{i,j} g_{ij} d\theta_i d\theta_j^* = \sum_{i,j} [I(\theta)]_{i,j} d\theta_i d\theta_j^* = d\theta^{+}.I(\theta).d\theta$$

Axiomatisation de la Géométrie de l'Information par les russes: Nikolai Nikolaevich Chentsov, dans les années 60

Math. Operationsforsch. Statist., Ser. Statistics, Vol. 9 (1978) No. 2, 267–276

Algebraic Foundation of Mathematical Statistics[2]

N. N. Čencov[1].

It results from the following sentence which is a non-symmetric analogy to PYPHAGOR's theorem for the information deviation [10], [6].

Theorem 6. *Let the probability measures R be dominated by $\{P_s\}$, which form the exponential family. If there is such distribution $P_\sigma \in \{P_s\}$ that*

$$\int_\Omega \left[\ln \frac{dP_{s'}}{dP_{s''}}(\omega)\right](R - P_\sigma)(d\omega) = 0 , \qquad (21)$$

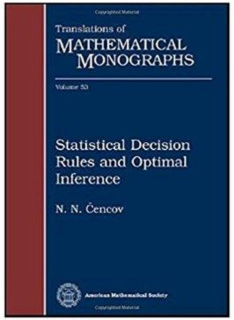
whatever $P_{s'}$, $P_{s''} \in \{P_s\}$ are, then

$$I(R: P_s) = I(R: P_\sigma) + I(P_\sigma: P_s), \quad \forall P_s . \qquad (22)$$

Corollary. *The measure P_σ is the I-nearest to R point of the exponential family.*

Recently a number of proposals for the arising non-symmetric PYPHAGORic information geometry has been recovered by CSISZAR [11].

Nikolai Nikolaevich Chentsov (1930-1992)



Géométrie de l'Information et structure de Legendre

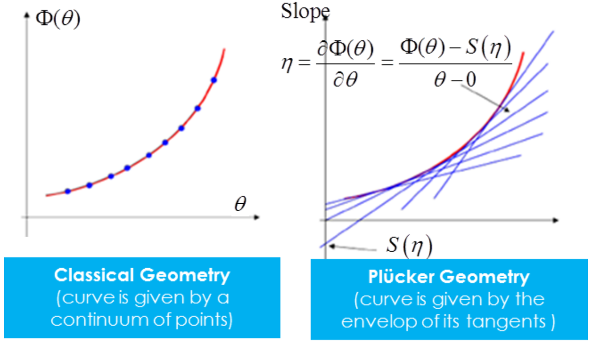
Transformée de Legendre , potentiels duaux et métrique de Fisher

- **S.I. Amari** a prouvé que la métrique riemannienne dans une famille exponentielle est la **matrice d'information de Fisher** définie par :

$$g_{ij} = -\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial\theta_i \partial\theta_j}\right]_{ij} \quad \text{with} \quad \Phi(\theta) = -\log \int_R e^{-\langle\theta, y\rangle} d\lambda$$

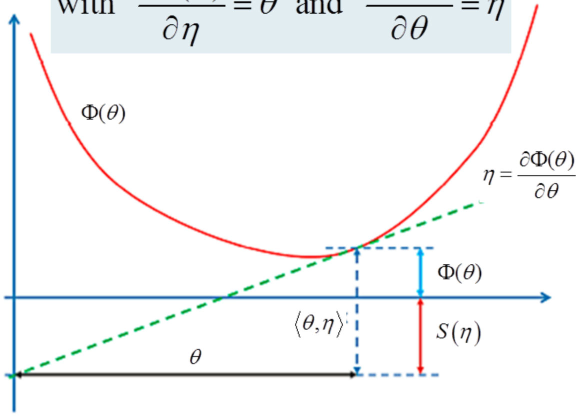
- et le potentiel dual, l' **entropie de Shannon** , est donné par la **transformée de Legendre** :

$$S(\eta) = \langle\theta,\eta\rangle - \Phi(\theta) \quad \text{with} \quad \eta_i = \frac{\partial\Phi(\theta)}{\partial\theta_i} \quad \text{and} \quad \theta_i = \frac{\partial S(\eta)}{\partial\eta_i}$$



$$S(\eta) = \langle\theta,\eta\rangle - \Phi(\theta)$$

$$\text{with} \quad \frac{\partial S(\eta)}{\partial\eta} = \theta \quad \text{and} \quad \frac{\partial\Phi(\theta)}{\partial\theta} = \eta$$



Métrique de Fisher, 2nd forme de Koszul sur les cones convexes saillants

Fonction caractéristique de Koszul-Vinberg et formes de Koszul

- **J.L. Koszul** et **E. Vinberg** ont introduit une métrique hessienne affinement invariante sur un cone convexe Saillant via la **fonctionn caractéristique**

$$\Phi_\Omega(\theta) = -\log \int_{\Omega^*} e^{-\langle \theta, y\rangle} dy = -\log \psi_\Omega(\theta) \ \text{ avec } \theta \in \Omega \text{ cône convexe saillant}$$

$$\psi_\Omega(\theta) = \int_{\Omega^*} e^{-\langle \theta, y\rangle} dy \ \text{ avec fonction caractéristique de Koszul-Vinberg}$$


Jean-Louis Koszul

- **1ère forme de Koszul:** $\alpha = d\Phi_\Omega(\theta) = -d\log\psi_\Omega(\theta)$
- **2nd forme de Koszul γ:** $\gamma = D\alpha = Dd\log\psi_\Omega(\theta)$

$$\left(Dd\log\psi_\Omega(x)\right)(u) = \frac{1}{\psi_\Omega(u)^2}\left[\int_{\Omega^*} F(\xi)^2 d\xi . \int_{\Omega^*} G(\xi)^2 d\xi - \left(\int_{\Omega^*} F(\xi).G(\xi)d\xi\right)^2\right] > 0 \ \text{ avec } \ F(\xi) = e^{-\frac{1}{2}\langle x,\xi\rangle} \ \text{ et } \ G(\xi) = e^{-\frac{1}{2}\langle x,\xi\rangle}\langle u,\xi\rangle$$

- Diffeomorphisme: $\eta = \alpha = -d\log\psi_\Omega(\theta) = \int_{\Omega^*} \xi p_\theta(\xi) d\xi \ \text{ avec } p_\theta(\xi) = \dfrac{e^{-\langle \xi,\theta\rangle}}{\int_{\Omega^*} e^{-\langle \xi,\theta\rangle} d\xi}$
- Transformée de Legendre: $S_\Omega(\eta) = \langle \theta, \eta\rangle - \Phi_\Omega(\theta) \ \text{ avec } \ \eta = d\Phi_\Omega(\theta) \ \text{ et } \ \theta = dS_\Omega(\eta)$

Métrique de Fisher et 2-forme de Souriau: thermodynamique des groupes de Lie

Mécanique statistique , Potentiels duaux & métrique de Fisher

- En mécanique statistique géométrique, **J.M. Souriau** a développé une « **thermodynamique des groupes de Lie » des systèmes dynamiques où la densité de Gibbs** (entropie maximale) est covariante par rapport à l'action du groupe de Lie. Dans le modèle de Souriau, les structures précédentes de la géométrie de l'information sont conservées :

$$U : M \to \mathfrak{g}^*$$

$$I(\beta) = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \beta^2} \text{ avec } \Phi(\beta) = -\log \int_M e^{-\langle \beta, U(\xi) \rangle} d\lambda \qquad \Phi(\beta) = -\log \psi_\Omega(\beta)$$


Jean-Marie Souriau

$$S(Q) = \langle \beta, Q \rangle - \Phi(\beta) \text{ avec } Q = \frac{\partial \Phi(\beta)}{\partial \beta} \in \mathfrak{g}^* \text{ et } \beta = \frac{\partial S(Q)}{\partial Q} \in \mathfrak{g}$$

- modèle **thermodynamique des groupes de Lie** de Souriau , β est une température « géométrique » (Planck), élément de l'algèbre de Lie du groupe $\mathfrak{g}$, et Q est une chaleur « géométrique », élément du dual de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^*$.

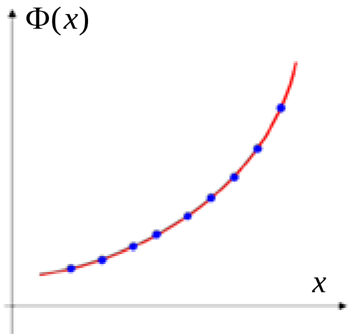
Signification intuitive de la transformée de Legendre

Transformée de Legendre

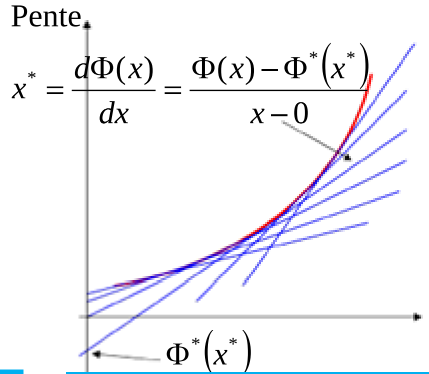
- La transformée de Legendre transforme une fonction définie par sa valeur en un point en une fonction définie par sa tangente.
- se rencontre en thermodynamique et en mécanique lagrangienne

$$\Phi^*\left(x^*\right)=\left\langle x^*,x\right\rangle-\Phi(x)$$

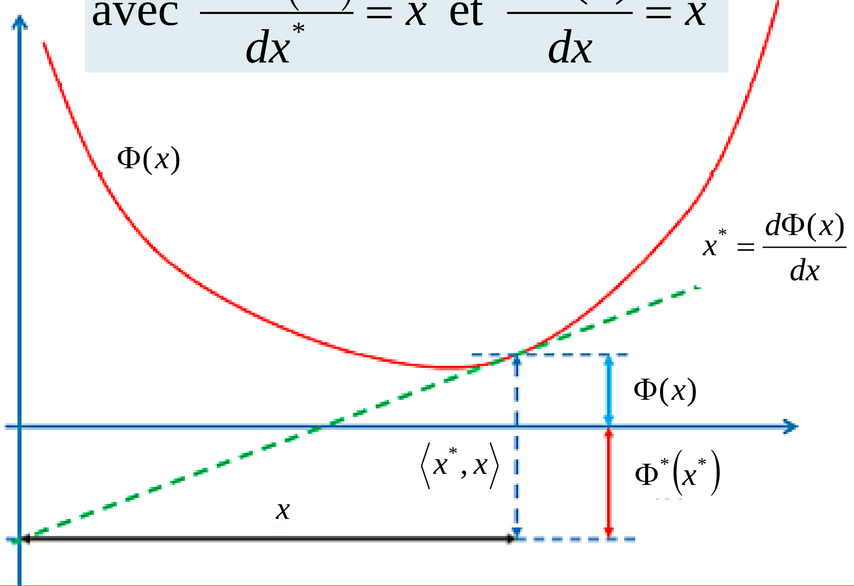
$$\text{avec}\quad \frac{d\Phi^*\left(x^*\right)}{dx^*}=x \quad \text{et} \quad \frac{d\Phi(x)}{dx}=x^*$$



Géométrie classique
(la courbe est représentée par un continuum de points)



Géométrie de Plücker
(la courbe est définie par l'enveloppe de ses tangentes)



Transformée de Legendre est l'équivalent d'une transformée de Fourier pour les fonctions convexes (elle met en dualité)
Brenier, Yann. Un algorithme rapide pour le calcul de transformées de Legendre-Fenchel discrètes, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 308 (1989), no. 20, 587–589.

Transformée de Legendre, 1787

1787, Adrien-Marie Legendre, “Mémoire sur l’intégration de quelques équations aux différences partielles”.

- Adrien-Marie Legendre a introduit la transformée de Legendre pour résoudre un problème de surface minimale posé par Gaspard Monge (Monge avait demandé à Legendre de consolider sa démonstration).
- Legendre précise “***J’y suis parvenu simplement par un changement de variables qui peut être utile dans d’autres occasions***”.

Legendre, A.M. Mémoire Sur L’intégration de Quelques Equations aux Différences Partielles; Mémoires de l’Académie des Sciences: Paris, France, 1787; pp. 309–351.

DES SCIENCES. 309

MÉMOIRE
SUR
L’INTÉGRATION DE QUELQUES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES.

Par M. LE GENDRE.

(I.)

De l’Équation de la moindre Surface.

ON fait, d’après M. de la Grange, que la furface la moindre entre des limites données, a pour équation différentielle

$$(1 + q^2)\frac{ddz}{dx^2} - 2pq\frac{ddz}{dx\,dy} + (1 + p^2)\frac{ddz}{dy^2} = 0,$$

en faifant, pour abréger, $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$. M. Monge a tenté d’intégrer cette équation dans les Mémoires de l’Académie de 1784; mais l’intégrale qu’il a donnée *(page 149)* n’étant pas à l’abri de toute objection, attendu que les fignes

Lorfque la valeur de ω fera connue, il eft clair qu’on aura celles de x, y, z, exprimées en p & q; favoir,

$$x = \frac{d\omega}{dp},\quad y = \frac{d\omega}{dq},$$
$$z = px + qy - \omega.$$

Equation de Clairaut, 1734

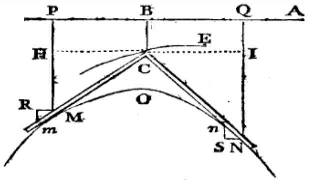
1724, Alexis Claude Clairaut

- Clairaut avait introduit une équation associée à la transformée de Legendre.
- Transformée de Legendre

$$\Phi^*(x^*) = \langle x^*, x\rangle - \Phi(x) \quad \text{avec} \quad \frac{d\Phi^*(x^*)}{dx^*} = x \ \text{ et } \ \frac{d\Phi(x)}{dx} = x^*$$

- **Equation de Clairaut**

$$\Phi^*(x^*) = \left\langle x^*, \frac{d\Phi^*(x^*)}{dx^*}\right\rangle - \Phi\left(\frac{d\Phi^*(x^*)}{dx^*}\right)$$



- Solution singulière: enveloppe de la famille des droites solutions

$$\frac{d\Phi^*(x^*)}{dx^*} = \frac{d\Phi^*(x^*)}{dx^*} + \left\langle x^*, \frac{d^2\Phi^*(x^*)}{dx^{*2}}\right\rangle - \Phi'\left(\frac{d\Phi^*(x^*)}{dx^*}\right)\frac{d^2\Phi^*(x^*)}{dx^{*2}}$$

$$\Rightarrow 0 = \left\langle x^* - \Phi'\left(\frac{d\Phi^*(x^*)}{dx^*}\right), \frac{d^2\Phi^*(x^*)}{dx^{*2}}\right\rangle \Rightarrow \boxed{x^* = \Phi'\left(\frac{d\Phi^*(x^*)}{dx^*}\right) \ \text{ et } \ \Phi(x^*) = \langle C, x^*\rangle + \Phi(C)}$$

196 MEMOIRES DE L'ACADEMIE ROYALE

SOLUTION DE PLUSIEURS PROBLEMES

Où il s'agit de trouver des Courbes dont la proprieté conſiſte dans une certaine relation entre leurs branches, exprimée par une Equation donnée.

Par M. CLAIRAUT.

DANS les Courbes dont on parle dans ce Mémoire, il ne ſuffit pas, comme dans la plûpart des autres, de conſidérer un de leurs points quelconques, ou une partie Infiniment petite de la Courbe pour la déterminer toute entiére. Les propriétés de celles-ci demandent néceſſairement qu'on prenne à la fois pluſieurs points à des diſtances finies les uns des autres, & dans des branches différentes.

Les Problemes que je vais donner, & ceux qui ſont de la même eſpece, ſeroient fort faciles, ſi, pour trouver les Courbes qui en ſont la ſolution, on ſe contentoit de prendre deux ou pluſieurs branches de différentes Courbes, au lieu de trouver une ſeule Courbe qui les comprenne toutes. Prenant une branche d'une Courbe quelconque, on en trouveroit aiſément d'autres par les méthodes ordinaires, qui auroient avec cette premiére la relation demandée. Mais pour faire enſorte que les différentes branches appartiennent toutes à la même Courbe, il faut néceſſairement avoir recours à d'autres méthodes qui adjoûtent de plus grandes difficultés à ces Problemes.

Il n'y a eu juſqu'ici, du moins que je ſçache, que très-peu de Problemes de cette nature, on peut dire même qu'il n'y a d'expliqué que le fameux Probleme des Trajectoires réciproques, dont M.rs Bernoulli, Pembreton & Euler ont donné des ſolutions dans les Actes de Leipſic, années 1718,

THALES

THALES

Les densités distinguées de Maurice Fréchet et l’équation d’Alexis Clairaut (papier de 1943) et ses liens avec la géométrie de l’information

Manuscrit perdu du cours IHP de statistique mathématique de 1939

SUR L'EXTENSION DE CERTAINES EVALUATIONS STATISTIQUES AU CAS DE PETITS ECHANTILLONS

par Maurice Fréchet.

Introduction.

Ce mémoire [1]) est consacré à l'extension au cas de petits échantillons de la méthode de détermination empirique d'un paramètre basée sur le principe de la moindre dispersion et à sa comparaison avec les méthodes basées sur le principe de la valeur dominante et sur celui de la plus grande plausibilité.

Si nous nous en étions tenus aux démonstrations, nous aurions pu abréger sensiblement ce mémoire. Mais il nous a paru nécessaire d'entrer dans plus de détails qu'on ne le fait généralement, afin de séparer plus nettement des déductions mathématiques, les hypothèses et les conventions sur lesquelles elles reposent et dont le choix, aussi plausible que possible, n'a cependant rien de nécessaire.

Notations. — Soient $X_1, X_2, \ldots. X_n$, n valeurs prises par une variable aléatoire X au cours de n épreuves indépendantes. On se limitera, dans la suite, au cas où la loi de répartition de X peut s'exprimer par une probabilité élémentaire $\delta\, dx$ et où, de plus, la densité de probabilité δ en un point x est une fonction d'une forme connue $f(x, \theta)$, dépendant d'un paramètre dont la valeur vraie θ_0 est inconnue.

On se propose d'évaluer θ_0 connaissant d'une part, la forme $f(x, \theta)$ de δ et, d'autre part, les résultats de n épreuves qui ont donné les valeurs numériques $x_1, x_2, \ldots. x_n$ à $X_1, X_2, \ldots. X_n$. Sous cette forme stricte, le problème *ne peut être résolu* par de simples déductions mathématiques.

Il s'agit donc de fixer *certaines conventions plausibles* qui assigneront à tout „échantillon" de n valeurs $x_1, x_2, \ldots. x_n$ de X une valeur déterminée t, laquelle sera prise comme valeur empirique de la valeur vraie θ_0. t est donc une certaine fonction convenablement choisie de $x_1, x_2, \ldots. x_n$

$$t = H_n(x_1, \ldots. x_n). \tag{1}$$

On voit que chaque échantillon détermine t, de sorte que

$$T_n = H_n(X_1, \ldots. X_n) \tag{2}$$

est une variable aléatoire dont chaque échantillon détermine une valeur. (Quand, dans nos raisonnements, n sera fixe, nous écrirons, pour simplifier, H au lieu de H_n et T au lieu de T_n).

[1]) Le contenu de ce mémoire a formé une partie de notre cours de statistique mathématique à l'Institut Henri Poincaré pendant l'hiver 1939—1940. Il constitue l'un des chapitres du deuxième cahier (en préparation) de nos „Leçons de Statistique Mathématique", dont le premier cahier „Introduction: Exposé préliminaire de Calcul des Probabilités" (119 pages in-quarto, dactylographiées) vient de paraitre au „Centre de Documentation Universitaire", Tournois et Constans, Paris.

Sur l'extension de certaines evaluations statistiques au cas de petits echantillons

Author(s): **Maurice Frechet**

Source: **Revue de l'Institut International de Statistique / Review of the International Statistical Institute, Vol. 11, No. 3/4 (1943), pp. 182-205**

Published by: International Statistical Institute (ISI)

Stable URL: http://www.jstor.org/stable/1401114

[1]) Le contenu de ce mémoire a formé une partie de notre cours de statistique mathématique à l'Institut Henri Poincaré pendant l'hiver 1939—1940. Il constitue l'un des chapitres du deuxième cahier (en préparation) de nos „Leçons de Statistique Mathématique", dont le premier cahier „Introduction: Exposé préliminaire de Calcul des Probabilités" (119 pages in-quarto, dactylographiées) vient de paraitre au „Centre de Documentation Universitaire", Tournois et Constans, Paris.

Manuscrit perdu du cours de statistique mathématique à l'Institut Henri Poincaré pendant l'Hiver 1939-1940 !

Maurice Fréchet et l'équation de Clairaut

Travaux précurseurs de Maurice Fréchet

- En 1939, dans son cours de l'IHP, Maurice Fréchet introduit ce qui fut appelée ensuite borne de Cramer-Rao (https://www.jstor.org/stable/1401114)

$$(\sigma_T)^2 \geqslant \frac{1}{n(\sigma_A)^2} \text{ avec } T = H(X_1, \dots, X_n), \quad A = \frac{1}{f(X,\theta)} \frac{\partial f(X,\theta)}{\partial \theta}$$

$$\hat{\theta} \text{ estimateur de } \theta \text{, borne de Fréchet : } R_\theta = E\left[\left(\theta - \hat{\theta}\right)\left(\theta - \hat{\theta}\right)^T\right] \geq I(\theta)^{-1}$$

$$[I(\theta)]_{i,j} = -E\left[\frac{\partial^2 \log P(Z/\theta)}{\partial\theta_i \partial\theta_j}\right] = E\left[\frac{\partial \log P(Z/\theta)}{\partial\theta_i}\frac{\partial \log P(Z/\theta)}{\partial\theta_j}\right]$$

- Dans son article de 1943, Maurice Fréchet s'intéresse aux "**densités distinguées**", densités qui atteignent cette borne. Il montre qu'elles dépendent d'une fonction (logarithme de la fonction de partition) qui vérifie **l'équation de Alexis Clairaut**.

$$\Phi^*(x^*) = \left\langle x^*, \frac{d\Phi^*(x^*)}{dx^*} \right\rangle - \Phi\left(\frac{d\Phi^*(x^*)}{dx^*}\right) \text{ et } x^* = \frac{d\Phi(x)}{dx}$$

(55) $$\boxed{\mu = \theta\,\mu' - \psi(\mu')}$$

c'est-à-dire une équation de Clairaut. La solution μ' = constante réduirait $f(x, \theta)$, d'après (48) à une fonction indépendante de θ, cas où le problème n'aurait plus de sens. μ est donc donné par la solution singulière de (55), qui est unique et s'obtient en éliminant s entre $\mu = \theta\, s - \psi(s)$ et $\theta = \psi'(s)$ ou encore entre

THALES

Papier séminal de Maurice Fréchet de 1943 (équation de Clairaut)

Fréchet, M. Sur l'extension de certaines évaluations statistiques au cas de petits échantillons. Revue de l'Institut International de Statistique 1943, 11, 182–205.

Etude des densités distinguées. Appelons (provisoirement, dans ce mémoire) *densité distinguée*, toute densité de probabilité $f(x, \theta)$ telle que la fonction

(46) $$\theta + \frac{\dfrac{\partial L f(x,\theta)}{\partial \theta}}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\partial}{\partial \theta} f(x,\theta)\right]^2 \frac{dx}{f(x,\theta)}}$$

soit indépendante de θ.

Pour ces densités distinguées, on va pouvoir déterminer la fonction minimisante $H'(X_1, \dots X_n)$ et étendre au cas des petits échantillons la comparaison des méthodes d'estimation faites par divers auteurs dans le cas des grands échantillons. Il vaut donc la peine de chercher la forme générale de $f(x, \theta)$ pour cette catégorie de variables.

de θ. En appelant $h(x)$ cette fonction, on voit qu'on a l'identité de la forme

(47) $$\lambda(\theta)\frac{\partial}{\partial \theta} L f(x,\theta) = h(x) - \theta$$

où $\lambda(\theta) > 0$. On peut considérer $\frac{1}{\lambda(\theta)}$ comme la dérivée seconde d'une fonction $\mu(\theta)$; d'où $\frac{\partial}{\partial \theta} L f(x,\theta) = \mu_\Theta''(\theta)\,[h(x) - \theta]$.

Par suite $L f(x,\theta) - \mu'_\Theta\,[h(x) - \theta] - \mu(\theta)$ est une quantité indépendante de θ que nous pouvons représenter par $l(x)$.

Ainsi toute densité distinguée, $f(x, \theta)$, est de la forme

(48) $$f(x,\theta) = e^{\mu'_\Theta[h(x)-\Theta] + \mu(\Theta) + l(x)}$$

(52bis) $$\lambda\,\mu'' = 1.$$

Incidemment, puisque, d'après (52), $\lambda(\theta)$ est positif, il en résulte aussi que $\mu''\left(=\frac{1}{\lambda(\theta)}\right)$ est aussi positif.

Métrique de Fisher

On peut d'ailleurs préciser d'une manière plus directe que par (50), le choix des fonctions $\mu(\theta)$, $h(x)$, $l(x)$: *on peut prendre arbitrairement $h(x)$ et $l(x)$* [1]) *et alors $\mu(\theta)$ est déterminé par* (50) ou même mieux *par une formule explicite.* En effet, (50) peut s'écrire

$$e^{\Theta\mu'-\mu} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\mu'_\Theta h(x)+l(x)}\,dx.$$

Donnons-nous alors arbitrairement $h(x)$ et $l(x)$ et soit s une variable arbitraire : la fonction

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{sh(x)+l(x)}\,dx \qquad {}^1)$$

sera une fonction positive connue que nous pourrons représenter par $e^{\psi(s)}$. On voit alors que $\mu(\theta)$ sera défini par

$$\theta\,\mu' - \mu = \psi(\mu') \quad \text{ou}$$

(55) $$\mu = \theta\,\mu' - \psi(\mu')$$

Legendre-Clairaut

c'est-à-dire une équation de Clairaut. La solution μ' = constante réduirait $f(x, \theta)$, d'après (48) à une fonction indépendante de θ, cas où le problème n'aurait plus de sens. μ est donc donné par la solution singulière de (55), qui est unique et s'obtient en éliminant s entre $\mu = \theta\,s - \psi(s)$ et $\theta = \psi'(s)$ ou encore entre

$$e^{\Theta s-\mu} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{sh(x)+l(x)}\,dx \text{ et}$$

(55bis) $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{sh(x)+l(x)}\,[h(x) - \theta]\,dx = 0.$$

Si l'on veut, $\mu(\theta)$ est donné par la relation

$$e^{-\mu} = e^{-\Theta s}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{sh(x)+l(x)}\,dx$$

où s est donné en fonction de θ par la relation implicite (55bis).

1ère partie de l'article de Fréchet: la borne de Fréchet-Darmois

- On considère l'estimateur de θ donné par : $T = H(X_1,\ldots,X_n)$
- et la variable aléatoire $A(X) = \dfrac{\partial \log p_\theta(X)}{\partial \theta}$ à laquelle il associe $U = \sum_i A(X_i)$
- La contrainte $\int_{-\infty}^{+\infty} p_\theta(x)dx = 1$ impose:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_i p_\theta(x_i)dx_i = 1 \underset{\substack{\text{dérivée}\\ \text{par } \theta}}{\Rightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\sum_i A(x_i)\right]\prod_i p_\theta(x_i)dx_i = 0 \Rightarrow E_\theta[U] = 0$$

- Si on suppose $E_\theta[T] = \theta \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} H(x_1,\ldots,x_n)\prod_i p_\theta(x_i)dx_i = \theta \underset{\substack{\text{dérivée}\\ \text{par } \theta}}{\Rightarrow} E[(T-\theta)U] = 1$
- Or, puisque $E[T] = \theta$ et $E[U] = 0$, on a : $E[(T - E[T])(U - E[U])] = 1$
- Or d'après l'inégalité de Schwarz : $[E(ZT)]^2 \le E[Z^2]E[T^2]$

$$1 \le E\left[(T - E[T])^2\right]E\left[(U - E[U])^2\right] = (\sigma_T\sigma_U)^2$$

- *U* étant la somme de variables indépendantes, l'égalité de Bienaymé donne :

$$(\sigma_U)^2 = \sum_i \left[\sigma_{A(X_i)}\right]^2 = n(\sigma_A)^2 \Rightarrow \boxed{(\sigma_T)^2 \ge \frac{1}{n(\sigma_A)^2}}$$

Fréchet étudie les « densités distinguées »: densités pour lesquelles l'estimateur atteint la borne

- L'inégalité précédente ne devient une égalité que si il existe deux nombres α et β (non aléatoires et non tous deux nuls) tels que $\alpha\left(H'-\theta\right)+\beta U=0$, avec H' fonction particulière parmi les H admissibles telle qu'on a l'égalité.
  Cette égalité se réécrit $H'=\theta+\lambda' U$ avec λ' un nombre certain. Or si on utilise la relation précédente : $E\left[(T-E[T])(U-E[U])\right]=1 \Rightarrow E\left[(H'-\theta)U\right]=\lambda' E_\theta\left[U^2\right]=1$
- On en déduit : $U=\sum_i A(X_i) \Rightarrow \lambda' n E_\theta\left[A^2\right]=1$
- dont on déduit λ' et la forme de l'estimateur H' associé qui atteint la borne:

$$\lambda'=\frac{1}{nE\left[A^2\right]} \Rightarrow H'=\theta+\frac{1}{nE\left[A^2\right]}\sum_i \frac{\partial \log p_\theta(X_i)}{\partial\theta}=\theta+\frac{\sum_i \frac{\partial \log p_\theta(X_i)}{\partial\theta}}{n\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\partial p_\theta(x)}{\partial\theta}\right]^2\frac{dx}{p_\theta(x)}}$$

- avec $E[H']=\theta+\lambda' E[U]=\theta$

2ème partie de l'article de Fréchet: l'équation de Clairaut

- H' serait donc bien une des fonctions admissibles si H' était indépendant de θ. En effet, si on considère $E_{\theta_0}\left[H'\right]=\theta_0$, $E\left[\left(H'-\theta_0\right)^2\right]\leq E_{\theta_0}\left[\left(H-\theta_0\right)^2\right]\ \forall H$ tq $E_{\theta_0}\left[H\right]=\theta_0$
- Or $H=\theta_0$ vérifie l'équation et l'inégalité montre qu'elle est presque certainement égale à θ_0 . Donc pour chercher θ_0 , il faudrait connaitre au préalable θ_0 .
- A cette étape, Fréchet cherche les « **densités distinguées** », toute densité de probabilité $p_\theta(x)$ telle que la fonction suivante soit indépendante de θ :

$$h(x)=\theta+\frac{\dfrac{\partial \log p_\theta(x)}{\partial\theta}}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\partial p_\theta(x)}{\partial\theta}\right]^2\frac{dx}{p_\theta(x)}}$$

- L'objectif de Fréchet est alors de déterminer la fonction minimisante $T=H'\left(X_1,\ldots,X_n\right)$ qui atteint la borne. L'identité précédente peut se réécrire :

$$\lambda(\theta)\frac{\partial \log p_\theta(x)}{\partial\theta}=h(x)-\theta$$

$$\lambda(x)=\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{\partial p_\theta(x)}{\partial\theta}\right]^2\frac{dx}{p_\theta(x)}\right]^{-1}=\left[\int_{-\infty}^{+\infty}p_\theta(x)\left[\frac{\partial \ln p_\theta(x)}{\partial\theta}\right]^2dx\right]^{-1}$$

2ème partie de l'article de Fréchet: l'équation de Clairaut

- Or comme $\lambda(\theta) > 0$, on peut considérer $\dfrac{1}{\lambda(\theta)}$ comme la dérivée seconde d'une fonction $\Phi(\theta)$ telle que :

$$\frac{\partial \log p_\theta(x)}{\partial \theta} = \frac{\partial^2 \Phi(\theta)}{\partial \theta^2}\left[h(x) - \theta\right]$$

$$\frac{1}{\lambda(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} p_\theta(x)\left[\frac{\partial \ln p_\theta(x)}{\partial \theta}\right]^2 dx = E\left[\left[\frac{\partial \ln p_\theta(x)}{\partial \theta}\right]^2\right] = \frac{\partial^2 \Phi(\theta)}{\partial \theta^2}$$

- dont on déduit que la quantité suivante est indépendante de θ:

$$\ell(x) = \log p_\theta(x) - \frac{\partial \Phi(\theta)}{\partial \theta}\left[h(x) - \theta\right] - \Phi(\theta)$$

- Une **densité distinguée** sera donc de la forme :

$$p_\theta(x) = e^{\frac{\partial \Phi(\theta)}{\partial \theta}\left[h(x) - \theta\right] + \Phi(\theta) + \ell(x)}$$ avec $$\int_{-\infty}^{+\infty} p_\theta(x)dx = 1$$

- Ces 2 conditions sont suffisantes

Fréchet montre que ces densités sont forcément des densités exponentielles.
Fréchet remarque que la matrice de Fisher est égale au hessien d'une fonction (fonction caractéristique de Massieu)

2ème partie de l'article de Fréchet: l'équation de Clairaut

- C'est 2 conditions sont suffisantes. Soient réciproquement 3 fonctions $\Phi(\theta)$, $h(x)$ et $\ell(x)$ telles qu'on ait quel que soit θ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\partial \Phi(\theta)}{\partial \theta}[h(x)-\theta]+\Phi(\theta)+\ell(x)} dx = 1$$

- alors la fonction est distinguée :

$$\theta + \frac{\dfrac{\partial \log p_\theta(x)}{\partial \theta}}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial p_\theta(x)}{\partial \theta}\right]^2 \frac{dx}{p_\theta(x)}} = \theta + \lambda(x) \frac{\partial^2 \Phi(\theta)}{\partial \theta^2}[h(x)-\theta]$$

- si $\lambda(x)\dfrac{\partial^2 \Phi(\theta)}{\partial \theta^2} = 1$ quand $\dfrac{1}{\lambda(x)} = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial \log p_\theta(x)}{\partial \theta}\right]^2 p_\theta(x)dx = (\sigma_A)^2$ la fonction

  précédente se réduit à $h(x)$ et donc ne dépend pas de θ :

$$\theta + \lambda(x)\frac{\partial^2 \Phi(\theta)}{\partial \theta^2}[h(x)-\theta] \underset{\lambda(x)\frac{\partial^2 \Phi(\theta)}{\partial \theta^2}=1}{\Rightarrow} h(x)$$

2ème partie de l'article de Fréchet: l'équation de Clairaut

- On a alors la relation suivante : $$\frac{1}{\lambda(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2 \Phi(\theta)}{\partial \theta^2} \right)^2 [h(x) - \theta]^2 e^{\frac{\partial \Phi(\theta)}{\partial \theta}(h(x)-\theta)+\Phi(\theta)+\ell(x)} dx$$
- La relation étant vérifiée quel que soit θ , on peut dériver l'expression précédente par rapport à θ : $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\partial \Phi(\theta)}{\partial \theta}(h(x)-\theta)+\Phi(\theta)+\ell(x)} \left(\frac{\partial^2 \Phi(\theta)}{\partial \theta^2} \right) [h(x) - \theta] dx = 0$$
- On peut diviser par $\frac{\partial^2 \Phi(\theta)}{\partial \theta^2}$ qui ne dépend pas de x. Si on dérive à nouveau par rapport à θ , on aura : $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\partial \Phi(\theta)}{\partial \theta}(h(x)-\theta)+\Phi(\theta)+\ell(x)} \left(\frac{\partial^2 \Phi(\theta)}{\partial \theta^2} \right) [h(x) - \theta]^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\partial \Phi(\theta)}{\partial \theta}(h(x)-\theta)+\Phi(\theta)+\ell(x)} dx = 1$$
- En combinant cette expression avec celle de $\frac{1}{\lambda(x)}$, on obtient : $\lambda(x) . \frac{\partial^2 \Phi(\theta)}{\partial \theta^2} = 1$
- et comme $\lambda(x) > 0$ alors $\frac{\partial^2 \Phi(\theta)}{\partial \theta^2} > 0$.

2ème partie de l'article de Fréchet: l'équation de Clairaut

- On peut prendre arbitrairement $h(x)$ et $l(x)$ et alors $\Phi(\theta)$ est déterminée par :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\partial\Phi(\theta)}{\partial\theta}[h(x)-\theta]+\Phi(\theta)+\ell(x)}dx = 1$$

- que l'on peut réécrire : $e^{\theta.\frac{\partial\Phi(\theta)}{\partial\theta}-\Phi(\theta)} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{\partial\Phi(\theta)}{\partial\theta}h(x)+\ell(x)}dx$

- Si on fixe alors arbitrairement $h(x)$ et $l(x)$ et soit s une variable arbitraire, la fonction suivante sera une fonction positive connue représentée par $e^{\Psi(s)}$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{s.h(x)+\ell(x)}dx = e^{\Psi(s)}$$

- On obtient $\Phi(\theta)$ par l'équation de Clairaut : $\Phi(\theta) = \theta.\frac{\partial\Phi(\theta)}{\partial\theta} - \Psi\left(\frac{\partial\Phi(\theta)}{\partial\theta}\right)$

- Le cas $\frac{\partial\Phi(\theta)}{\partial\theta} = cste$ réduirait la densité à une fonction indépendante de θ, donc $\Phi(\theta)$ est donné par la solution singulière de cette équation de Clairaut, qui est unique et s'obtient en éliminant s entre : $\Phi = \theta.s - \Psi(s)$ et $\theta = \frac{\partial\Psi(s)}{\partial s}$

Transformée de Legendre !

2ème partie de l'article de Fréchet: l'équation de Clairaut

$$\Phi = \theta.s - \Psi(s) \text{ et } \theta = \frac{\partial \Psi(s)}{\partial s}$$

- La fonction $\Phi(\theta)$ s'obtient également en éliminant *s* entre:

$$e^{\theta.s-\Phi(\theta)} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{s.h(x)+\ell(x)} dx \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{s.h(x)+\ell(x)} [h(x)-\theta] dx = 0$$

- On obtient $\Phi(\theta) = -\log \int_{-\infty}^{+\infty} e^{s.h(x)+\ell(x)} dx + \theta.s$ où s est donné de façon implicite par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{s.h(x)+\ell(x)} [h(x)-\theta] dx = 0$$

- Fréchet remarque également que: $(\sigma_{T_n})^2 = \dfrac{1}{n(\sigma_A)^2} = \dfrac{1}{n\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\dfrac{\partial p_\theta(x)}{\partial \theta}\right]^2 \dfrac{dx}{p_\theta(x)}} = \dfrac{1}{n\dfrac{\partial^2\Phi(\theta)}{\partial \theta^2}}$

- T_n a une loi : $p_\theta(t) = \sqrt{n}\dfrac{1}{\sigma_A\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n(t-\theta)^2}{2.\sigma_A^2}}$ avec $(\sigma_A)^2 = \dfrac{\partial^2\Phi(\theta)}{\partial \theta^2}$

2ème partie de l'article de Fréchet: l'équation de Clairaut

- on peut écrire l'estimateur sous la forme : $H'(X_1,\dots,X_n)=\frac{1}{n}\left[h(X_1)+\dots+h(X_n)\right]$
- On peut calculer alors la valeur empirique associée :

$$t=H'(x_1,\dots,x_n)=\frac{1}{n}\sum_i h(x_i)=\theta+\lambda(\theta)\sum_i\frac{\partial\log p_\theta(x_i)}{\partial\theta}$$

- et en prenant $\theta=t$, on a puisque $\lambda(\theta)>0$: $\sum_i\frac{\partial\log p_t(x_i)}{\partial t}=0$
- Quand $p_\theta(x)$ est une densité distinguée, la valeur empirique t de θ correspondant à un échantillon $x_1,\dots,x_n$ est une racine de l'équation précédente en t. Cette équation à une racine et une seule quand *X* est une variable distinguée. D'après :

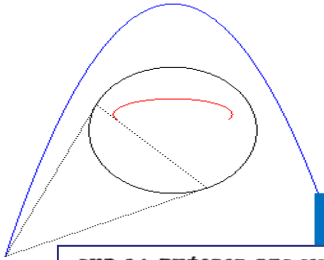
$$p_\theta(x)=e^{\frac{\partial\Phi(\theta)}{\partial\theta}[h(x)-\theta]+\Phi(\theta)+\ell(x)}\Rightarrow\sum_i\frac{\partial\log p_t(x_i)}{\partial t}=\frac{\partial^2\Phi(t)}{\partial t^2}\left[\frac{\sum_i h(x_i)}{n}-t\right]\ \text{avec}\ \frac{\partial^2\Phi(t)}{\partial t^2}>0$$

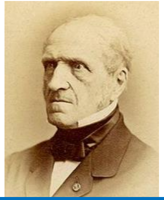
- On retrouve la racine unique : $t=\frac{1}{n}\sum_i h(x_i)$
- $T\equiv H'(X_1,\dots,X_n)=\frac{1}{n}\sum_i h(X_i)$ ne peut avoir une forme arbitraire, c'est une somme de fonctions de chacune des quantités et c'est même la moyenne arithmétique des *n* valeurs observées d'une même variable aléatoire auxiliaire.

Transformée de Legendre et Maurice Fréchet: 1er contact dans le cours d'Hadamard (Polaire réciproque par rapport à un paraboloïde)

Transf. de Legendre & Polaire réciproque

- **Darboux** donne dans son livre une interprétation de **Chasles** : « ***Ce qui revient suivant une remarque de M. Chasles, à substituer à la surface sa polaire réciproque par rapport à un paraboloïde*** »
- Dans le cours « Leçons sur le calcul des variations », **J. Hadamard**, repris par **M.E. Vessiot**, utilise la polaire réciproque de la figurative, la figuratrice.
- Note de **Paul Belgodère** présenté par Elie Cartan « ***Extrémale d'une surface*** »





M. Chasles

G. Darboux

M.E. Vessiot

SUR LA THÉORIE DES MULTIPLICITÉS ET LE CALCUL DES VARIATIONS

PAR M. E. VESSIOT.

Partons d'abord du problème de Lagrange, et posons comme précédemment

(200) $$q_i = f_{y'_i} \qquad (i = 1, \dots n)$$

(201) $$H = \sum_{i=1}^{n} y'_i f_{y'_i} - f.$$

(202) $$H = H(q_1, \dots q_n, y_1, \dots y_n, x)$$

COURS DU COLLÈGE DE FRANCE

LEÇONS

SUR LE

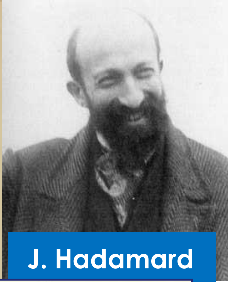
CALCUL DES VARIATIONS

PROFESSÉES PAR

J. HADAMARD

PROFESSEUR AU COLLÈGE DE FRANCE

RECUEILLIES PAR M. FRÉCHET



J. Hadamard

La différentielle totale de H sera dès lors la même qu'au n° 140

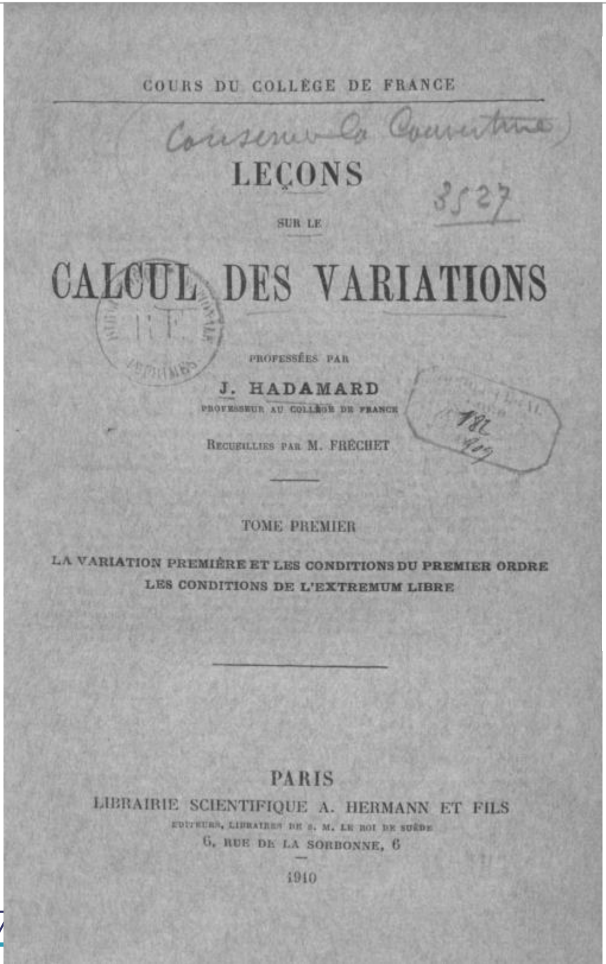
(204) $$dH = \sum_i y'_i dq_i - f_{y_i} dy_i.$$

La transformation de Legendre, définie par les équations (200), (201) reviendra encore à prendre la polaire réciproque de cette figurative par rapport au paraboloïde

(205) $$y'^2_1 + y'^2_2 - 2f_0 = 0.$$

Ce jeune homme entre à l'École Normale. Au Collège de France, il voit devant lui ce Jacques Hadamard qu'il admire déjà si fort. Il le suit assidûment; il étudie les belles « *Leçons sur le calcul des variations* » que Maurice Fréchet, élève d'élection du Maître, a rédigées peu auparavant, et que le Maître complète et enrichit par l'exposé de ses travaux sur les *isopérimètres*.

Maurice Fréchet et Jacques Hadamard: Leçons sur le calcul des variations de Jacques Hadamard, recueillis par Maurice Fréchet



COURS DU COLLÈGE DE FRANCE

Conserver la Couverture

3527

LEÇONS

SUR LE

CALCUL DES VARIATIONS

PROFESSÉES PAR

J. HADAMARD

PROFESSEUR AU COLLÈGE DE FRANCE

RECUEILLIES PAR M. FRÉCHET

TOME PREMIER

LA VARIATION PREMIÈRE ET LES CONDITIONS DU PREMIER ORDRE
LES CONDITIONS DE L'EXTREMUM LIBRE

PARIS
LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN ET FILS
ÉDITEURS, LIBRAIRES DE S. M. LE ROI DE SUÈDE
6, RUE DE LA SORBONNE, 6

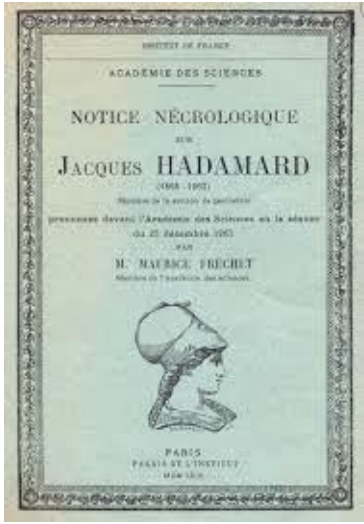
1910

Au Collège de France, pendant plusieurs années, Hadamard s'était conformé à la tradition en faisant des cours [...]. Mais une conception toute différente de son propre rôle le hantait et dès 1913, il avait fait analyser quelques Mémoires par ses auditeurs. C'était une première approche vers l'institution d'un « séminaire », institution déjà répandue dans plusieurs pays étrangers. Mais notre confrère [11] allait donner au nom de Séminaire, un sens personnel tout nouveau, qui allait rendre son séminaire partout célèbre. Mais la guerre vint et arrêta ce premier essai. La guerre finie, Hadamard revint à son idée. À l'étranger, les séminaires étaient généralement spécialisés. Grâce à son érudition et à son aptitude à dominer tous les domaines, Hadamard étend à toutes les parties des mathématiques l'activité de son séminaire.

Il débute en exposant lui-même l'œuvre de Henri Poincaré (pour laquelle il a une grande admiration), œuvre qui s'étale, elle aussi, sur toutes les branches des mathématiques pures et appliquées.

Puis il fait participer ses auditeurs à des analyses de Mémoires. Il lui faut choisir ceux-ci, choisir aussi les chercheurs capables de les exposer. Le succès appelle le succès ! À mesure que son séminaire est connu, ce ne sont plus des étudiants qui y assistent, mais des chercheurs, et même des savants venus de tous les coins du monde.

Jacques Hadamard



THALES

La Géométrie de l’Information au XXIème siècle

Comparaison Géométrie de l'information et transport optimal

Complex Gaussian Circular Law of zero mean $: p(Z/R)=\frac{1}{\pi^n \det(R)}e^{-Tr(\hat{R}R^{-1})}$ with $\begin{cases}\hat{R}=ZZ^+\\ E[\hat{R}]=R\end{cases}$	
Information Geometry	**Optimal Transport Theory**
Distance between random variables: $ds^2=d\theta^+ I(\theta)d\theta=Tr\left((R^{-1}dR)^2\right)=\left\Vert R^{-1/2}dRR^{-1/2}\right\Vert_F^2$ $I(\theta)=\left[g_{\bar{ij}}\right]_{i,j},\ g_{\bar{ij}}=-E\left[\frac{\partial^2 \log p(X/\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j^*}\right]$	**Distance between random variables:** $d^2(P,Q)=\underset{X,Y}{Inf}\ E\left[\lvert X-Y\rvert^2\right]$
Metric: $g_P(R_X,R_Y)=Tr\left(P^{-1}.R_X.P^{-1}.R_Y\right)$	**Metric:** $g_P(R_X,R_Y)=Tr(R_X.P.R_Y)$
Tangent space and Exponential map: $\exp_X\left(\nu_X^Y,t\right)=X^{1/2}e^{t\log\left(X^{-1/2}YX^{-1/2}\right)}X^{1/2}$ $\begin{cases}\nu_X^Y=grad_X^Y(V)=-\exp_X^{-1}(V)\\ \nu_X^Y=-X^{1/2}\log\left(X^{-1/2}YX^{-1/2}\right)X^{1/2}\\ \exp_X\left(\nu_X^Y,t\right)=X^{1/2}e^{-t\left(X^{-1/2}.\nu_X^Y.X^{-1/2}\right)}X^{1/2}\end{cases}$	**Tangent space and Exponential map:** $\exp_{N(0,R_Y)}(t.X)=N\left(0,R_{R_Y,(t)}\right)$ $R_{R_Y,(t)}=((1-t)I_k+t.X)R_Y((1-t)I_k+t.X)$
Distance between covariance matrices: $d^2(R_X,R_Y)=\left\Vert\log\left(R_X^{-1/2}.R_Y.R_X^{-1/2}\right)\right\Vert_F^2$ $d^2(R_X,R_Y)=\sum_{k=1}^{n}\log^2(\lambda_k)$ $\det\left(R_X^{-1/2}.R_Y.R_X^{-1/2}-\lambda.I\right)=\det(R_Y-\lambda R_X)=0$	**Distance between covariance matrices:** $d^2(R_X,R_Y)=Tr[R_X]+Tr[R_Y]-2.Tr\left[\left(R_X^{1/2}R_YR_X^{1/2}\right)^{1/2}\right]$
Geodesic between covariance matrices: $\gamma(t)=R_X^{1/2}e^{t\log\left(R_X^{-1/2}R_YR_X^{-1/2}\right)}R_X^{1/2}$ $\gamma(t)=R_X^{1/2}\left(R_X^{-1/2}R_YR_X^{-1/2}\right)^t R_X^{1/2}$ $\gamma(0)=R_X$, $\gamma(1)=R_Y$ and $\gamma(1/2)=R_X\circ R_Y$	**Geodesic between covariance matrices:** $\gamma(t)=((1-t)I_k+t.D_{X,Y})R_Y((1-t)I_k+t.D_{X,Y})$ with $D_{X,Y}=R_X^{1/2}\left(R_X^{1/2}R_YR_X^{1/2}\right)^{-1/2}R_X^{1/2}=R_X\circ R_Y^{-1}$ $d(\gamma(s),\gamma(t))\leq(t-s).d(\gamma(0),\gamma(1))$

Cartan Symmetric Space: $G_{(R_X,R_Y)}R_Z=(R_X\circ R_Y)R_Z^{-1}(R_X\circ R_Y)$ with $R_X\circ R_Y=R_X^{1/2}\left(R_X^{-1/2}R_YR_X^{-1/2}\right)^{1/2}R_X^{1/2}$	**Space associated to Optimal transport:** $(x-m_x)^+R_X^{-1}(x-m_X)=\left[R_X^{-1/2}(x-m_X)\right]^+\left[R_X^{-1/2}(x-m_X)\right]$ $=(y-m_Y)^+R_Y^{-1}(y-m_Y)$ $x=\nabla\psi(y)=D_{X,Y}(y-m_Y)+m_X$ $\psi(v)=\frac{1}{2}(v-m_Y)^+D_{X,Y}(v-m_Y)+(m_X-v)$
Bruhat-Tits Space (semi-parallelogram inequality): $\forall x_1,x_2\ \ \exists z$ such that $\forall x\in X$ $d(x_1,x_2)^2+4d(x,z)^2\leq 2d(x,x_1)^2+2d(x,x_2)^2$	**Alexandrov Space:** $d(\alpha,\gamma(t))^2\geq$ $(1-t).d(\alpha,\gamma(0))^2+t.d(\alpha,\gamma(t))^2-t(1-t).d(\gamma(0),\gamma(1))^2$
Cartan-Hadamard Space: Complete, simply connected with negative sectional curvature Manifold	**Wasserstein Space:** Non-negative sectional curvature Manifold
Sectional curvature: $K=-Tr\left((I-ZZ^+)^{-1}M(I-ZZ^+)^{-1}M^+\right)$ with $(I-ZZ^+)^{-1}=PP^+$ when $I-ZZ^+>0$ $K=-Tr(TT^+)<0$ where $T=P^+MP$	**Sectional curvature:** $K_{N(V)}(X,Y)=(3/4).Tr(([Y,X-S])V([Y,X]-S))^T$
Barycenter of N covariances matrices: $\sum_{k=1}^{N}\log\left(R^{-1/2}R_kR^{-1/2}\right)=0$ $R_{(n+1)}=R_{(n)}^{1/2}e^{\varepsilon\left(\sum_{k=1}^{N}\log\left(R_{(n)}^{-1/2}R_kR_{(n)}^{-1/2}\right)\right)}R_{(n)}^{1/2}$	**Barycenter of N covariances matrices:** $\sum_{k=1}^{N}\left(R^{1/2}R_kR^{1/2}\right)^{1/2}=R$ $K_{(n+1)}=\left(\sum_{k=1}^{N}\left(K_{(n)}K_k^2K_{(n)}\right)^{1/2}\right)^{1/2}$ with $K_i=R_i^{1/2}$

Pour la partie transport optimal, voir :

A. Takatsu. On Wasserstein Geometry of the Space of Gaussian Measures, to appear in Osaka J. Math., 2011, http://arxiv.org/abs/0801.2250

C.R. Rao et le journal « Information Geometry » édité par SPRINGER

EDITORIAL

CrossMark

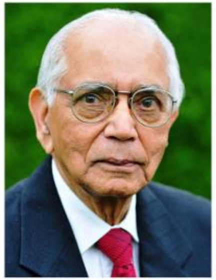
Congratulatory message

Calyampudi Radhakrishna Rao[1]

Published online: 19 September 2018

I am glad to know that Springer is starting a new journal with the title of *Information Geometry* under the chief editorship of Shinto Eguchi with co-editors Nihat Ay, Frank Nielsen, and Jun Zhang. The journal is interdisciplinary, integrating various disciplines, especially branches of mathematical sciences related to the field of information geometry. This is a needed area of literature, and the journal meets that requirement.

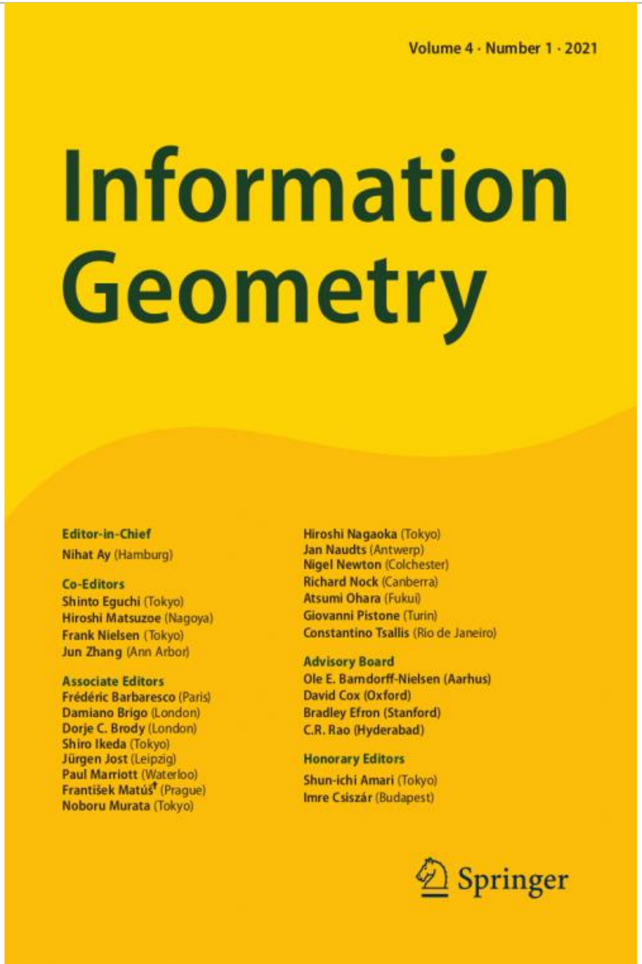
Congratulations and best wishes for the success of the journal.



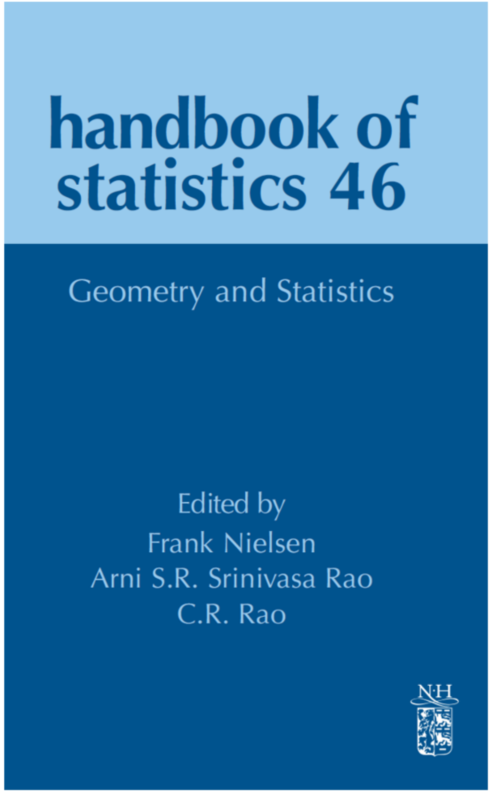
C. R. Rao

C.R. Rao

https://link.springer.com/article/10.1007/s41884-018-0010-8



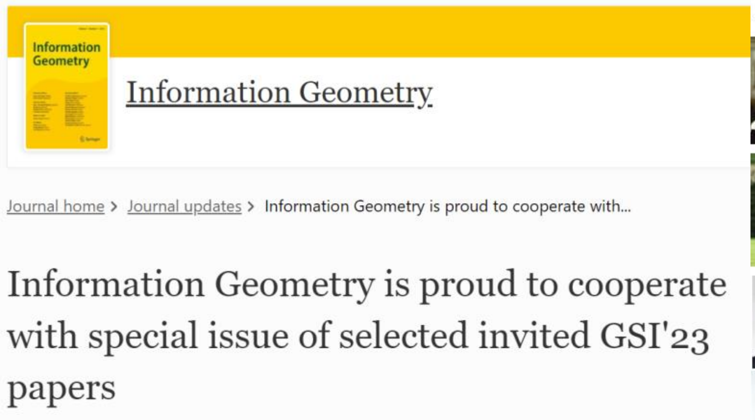
C.R. Rao éditeur du Handbook of Statistics n°46 « Geometry & Statistics », 2022

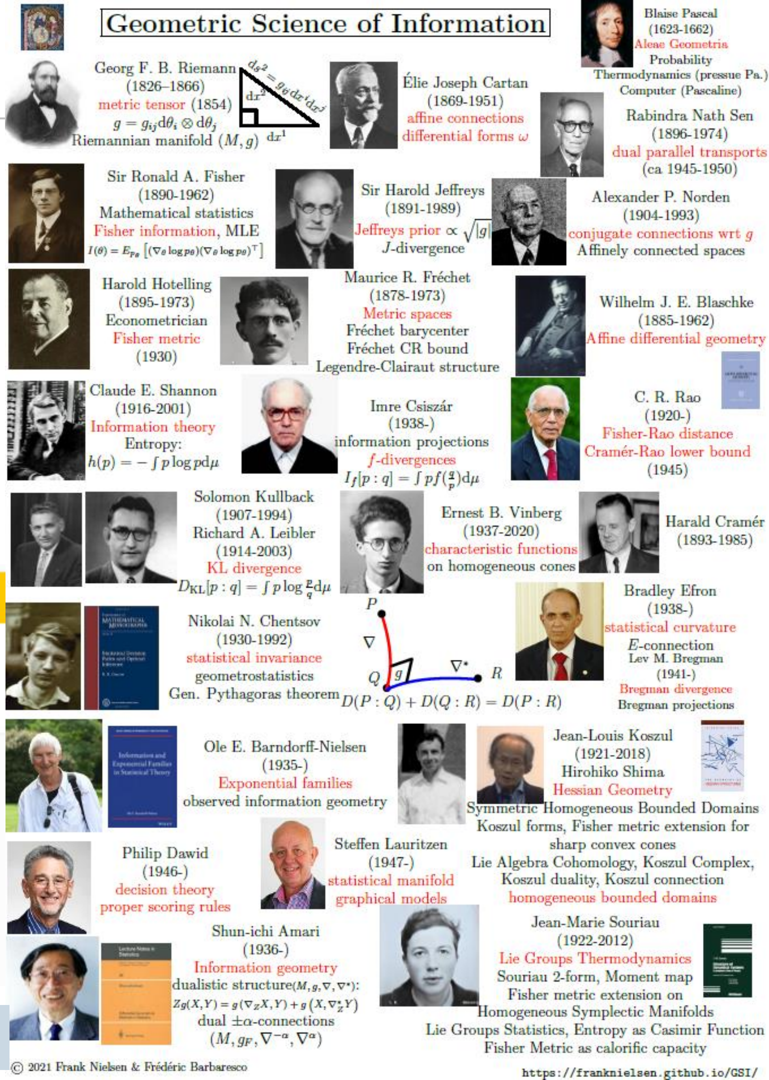


September 2022

- Part I: Foundations in Classical Geometry and Analysis
  - **Geometry, Information and Complex Bundles**
    by Arni S.R. Srinivasa Rao and Steven G. Krantz
  - **Geometric Methods for Sampling, Optimisation, Inference and Adaptive Agents**
    by Alessandro Barp, Lancelot Da Cost, Guilherme Franca Karl Friston, Mark Girolami, Michael I. Jordan, and Grigorios A. Pavliotis
  - **Equivalence Relations and Inference for Sparse Markov Models**
    by Donald E.K. Martin, Iris Bennett, Tuhin Majumder, and Soumendra Nath Lahiri
- Part II: Information Geometry
  - **Symplectic Theory of Heat and Information Geometry**
    by Frédéric Barbaresco
  - **Unifying Framework for Some Directed Distances in Statistics**
    Michel Broniatowski and Wolfgang Stummer
  - **The analytic dually flat space of the mixture family of two prescribed distinct Cauchy distributions**
    by Frank Nielsen
  - **Local Measurements of Non-linear Embeddings with Information Geometry**
    by Ke Sun
- Part III: Advanced Geometrical Intuition and Analysis
  - **Parallel transport, a central tool in geometric statistics for computational anatomy. Application to cardiac motion modelling**
    by Nicolas Guigui and Xavier Pennec
  - **Geometry and Mixture Models**
    by Paul Marriott
  - **Gaussian distributions on Riemannian symmetric spaces of non-positive curvature**
    by Salem Said, Cyrus Mostajeran, and Simon Heuveline
  - **Multilevel contours on bundles of complex planes**
    by Arni S.R. Srinivasa Rao

Géométrie de l'Information
L'aventure continue





https://franknielsen.github.io/GSI/

Conclusion

Que faut-il retenir après avoir tout oublié

- Fréchet étend les probabilités et les statistiques dans des espaces abstraits (métriques)
- Fréchet & Levy s'intéressaient à la distance relative aux transport optimal
- Borne de Fréchet-Darmois : La découverte de la borne sur la variance de tout estimateur est à attribuer à Maurice Fréchet lors de l'hiver 1939 (cours de l'IHP), 6 ans avant Rao. Georges Darmois publie le cas multivarié en 1945.
- L'article séminale de 1943 n'introduit pas seulement la borne de Fréchet, mais l'étude des densités distinguées, densités quiatteignent cette borne. Fréchet montre que ces densités sont forcément des densités exponentielles.
- Fréchet remarque que la matrice de Fisher est égale au hessien d'une fonction intervenant via une équation de Clairaut. Cette fonction c'est le logarithme de la fonction de partition.
- Fréchet montre que ces densités distingués sont définies par l'intermédiaire de l'Equation de Clairaut(-Legendre), qui met en dualité 2 fonctions (ce qui sera interprété comme entropie et la fonction caractéristique de Massieu en Géométrie de l'Information et en thermodynamique).
- Les structures des densités distinguées et l'équation de Clairaut-Fréchet sont les structures fondamentales de la Géométrie de l'Information, basée sur la géométrie hessienne de J.L. Koszul (géométrie des cônes convexes saillants).

Références

- [1] Fréchet M., « Sur l'extension de certaines évaluations statistiques au cas de petits échantillons ». Revue de l'Institut International de Statistique, vol. 11, n° 3/4, pp. 182–205, 1943; https://www2.sonycsl.co.jp/person/nielsen/infogeo/Seminar/fondamental-borne-frechet.pdf
- [2] Barbaresco F., « Les densités de probabilité « distinguées » et l'équation d'Alexis Clairaut: regards croisés de Maurice Fréchet et de Jean-Louis Koszul »; https://www.academia.edu/download/46241047/GRETSI-BARBARESCO-FRECHET-KOSZUL-RevA.pdf
- [3] Nielsen F., Cramér-Rao Lower Bound and Information Geometry, Connected at Infinity II, Springer, 2013; https://www.springerprofessional.de/en/cramer-rao-lower-bound-and-information-geometry/13329622
- [3] Charle C., Telkes E. Maurice Fréchet, Les Professeurs de la faculté des sciences de Paris, 1901-1939. Dictionnaire biographique (1901-1939) Paris : Institut national de recherche pédagogique, 1989. pp. 127-131. (Histoire biographique de l'enseignement, 25); http://www.persee.fr/doc/inrp_0298-5632_1989_ant_25_1_8693
- [4] Arboleda, Luis Carlos, Sur la vie et l'œuvre de M. Fréchet, Mémoire de D.E.A., Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales, Paris, 1977
- [5] Arboleda, Luis Carlos, Rapport sur l'inventaire et l'analyse des papiers du Fonds-Fréchet dans les archives de l'Académie des Sciences de Paris, Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques, Tome 2, p. 9-17, 1981; http://www.numdam.org/item/CSHM_1981__2__9_0/
- [6] Laurent Mazliak, Borel, Fréchet, Darmois La découverte des statistiques par les probabilistes français, Electronic Journ@l for History of Probability and Statistics, Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales, 6 (2), pp.6.2, 2010; https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00631625
- [7] Fréchet M., Notice sur les travaux scientifiques de M. Maurice Fréchet, Paris, 1933, 1934 et 1951 (disponible au Centre Emile Borel de l'IHP)

Maurice Fréchet – Première analyse des Fonds Fréchet par Luis Carlos Arboleda

- [A] Arboleda, Luis Carlos, **Sur la vie et l'œuvre de M. Fréchet**, Mémoire de D.E.A., Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales, Paris, 1977
- [B] Arboleda, Luis Carlos, **Rapport sur l'inventaire et l'analyse des papiers du Fonds-Fréchet dans les archives de l'Académie des Sciences de Paris**, Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques, Tome 2, p. 9-17, 1981
- [C] Arboleda, Luis Carlos, **Contribution à l'étude des premières recherches topologiques. D'après La correspondance et les publications de Maurice Fréchet (1904-1928)**, Thèse de doctorat de 3ème cycle, soutenue à Paris le 17 avril 1980 à l'Ecole des Hautes Etudes en Sciences Sociales.

RAPPORT SUR L'INVENTAIRE ET L'ANALYSE DES PAPIERS DU FONDS-FRECHET

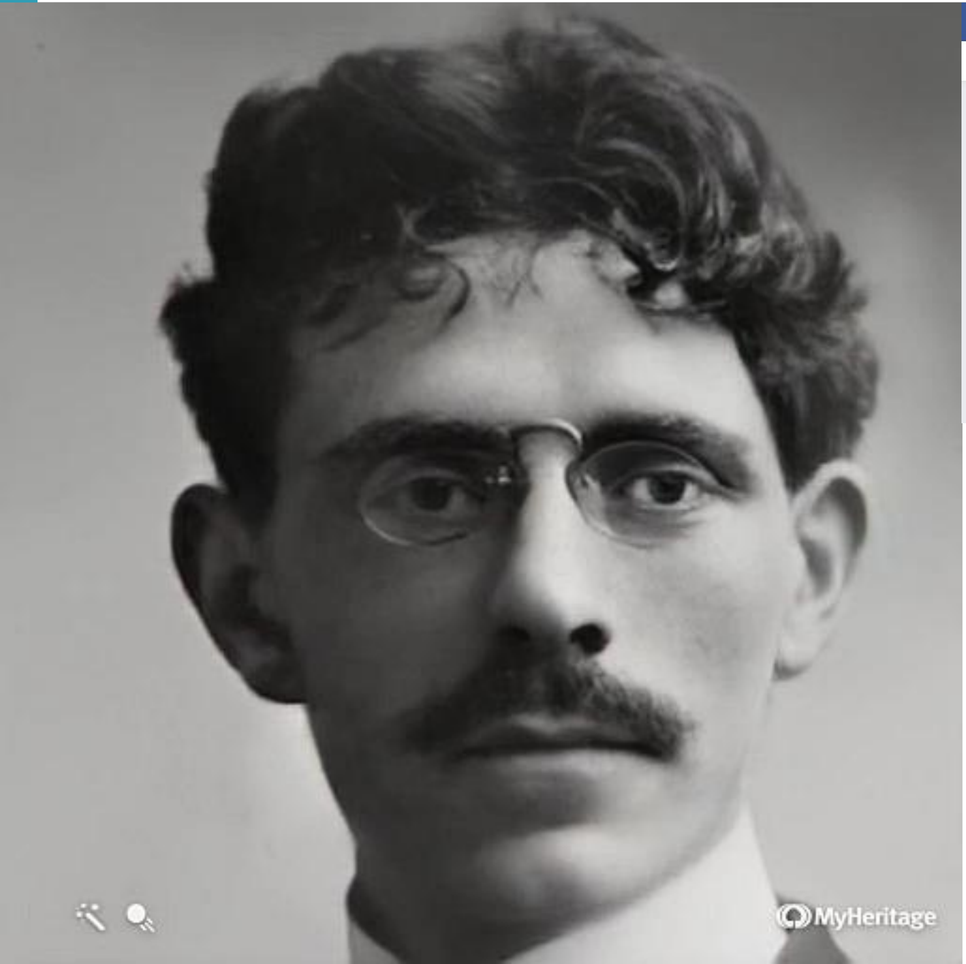
DANS LES ARCHIVES DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE PARIS*

par Luis Carlos ARBOLEDA[1]

En Février 1977, nous avons entrepris, pour la première fois, une étude introductive sur la vie et l'oeuvre de M. Fréchet. Il s'agissait d'une étape préalable au travail de recherches dans le Fonds documentaire des Archives. Nous avons rédigé, dans notre mémoire pour le D.E.A.**, l'essentiel de nos lectures du dossier administratif de Fréchet à l'Académie, des notices et rapports sur sa carrière scientifique et de ses publications pour le grand public. Cela nous a permis de nous faire une première idée sur les traits principaux de l'évolution d'une carrière mathématique qui se déploya dans plusieurs domaines au long de soixante ans. Enfin, nous avons réussi à mettre au point une liste assez complète de ses travaux scientifiques.

Maurice Fréchet – 12 Square Desnouettes Paris 17ème

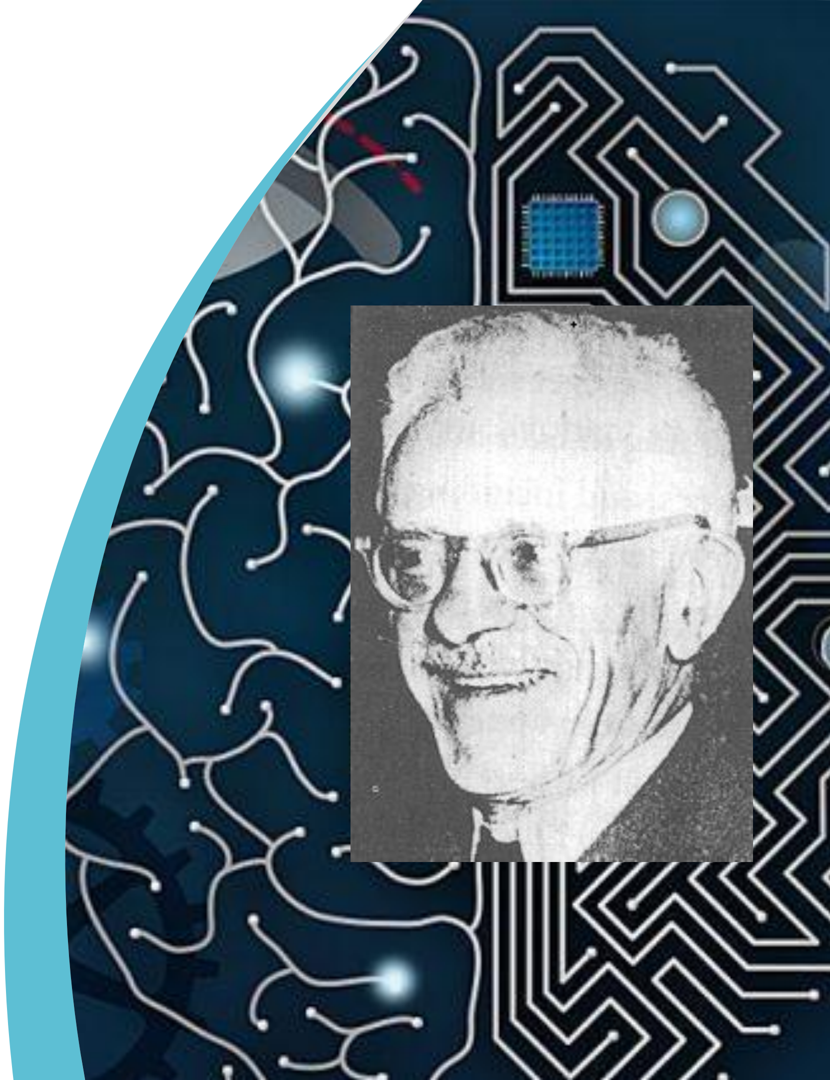
Maurice Fréchet Vivant



https://www.facebook.com/FrechetMaurice/

THALES

Planches additionnelles



Maurice Fréchet 1878-1973
Né 02 Sept. 1878 à Maligny (Yonne), Décédé 04 Juin 1973 à Paris (14ème)

Jaques Gedeon 1831 FRECHET
Instituteur

Naissance **24 oct. 1831**
Desaignes, Ardeche

Mariage **1 oct. 1868**
avec Victorine Zoe 1845 CELLIER
Privas, 07

Jacques... FRECH...
Jeanne ... ROUX-...

Jean Pierre 1762 FRECHET
Isabeau 1759 PICQ

Pierre Louis 1801 FRECHET
Marie Isabeau 1797 SALLES

Jaques Gedeon 1831 FRECHET
Victorine Zoe 1845 CELLIER

Louis Victor 1869 FRECHET
Abel Lucien 1873 FRECHET
Andre Emile 1875 FRECHET
Maurice Rene 1878 FRECHET
Suzanne Marie 1881 CARRIVE
Marguerite 1879 FRECHET
Charles Aime 1886 FRECHET

Helene Marguerite 19... FRECHET
Henri Jacques 1911 FRECHET
Denise 1915 FRECHET
Alain Louis 1915 FRECHET

Mariage 3 sept. 1908
avec Suzanne Marie CARRIVE
Sauveterre-de-Bearn, 64

Maurice Maurice Fréchet (1878-1973)

René Maurice Fréchet né à Maligny le 2 septembre 1878 et mort à Paris le 4 juin 1973

- Famille originaire de Desaignes (Ardèche). 4ème enfant d'une famille de six. Son père, Jacques, Gédéon, fut instituteur libre, puis directeur de l'école protestante de l'Oratoire à Paris. Sa mère, Victorine, Zoé Cellier, était couturière.
- Boursier aux lycées Buffon et Saint-Louis, élève de Jacques Hadamard qui l'orienta vers les mathématiques, lui donna des leçons supplémentaires et fut son « père spirituel »
- Après les baccalauréats ès lettres et ès sciences il suit la classe de mathématiques spéciales au lycée Saint-Louis
- De 1900 à 1903 , études supérieures scientifiques à l'École normale supérieure et à la faculté des sciences de l'université de Paris, où il obtient les licences ès sciences mathématiques et physiques en 1902. (ENS 1899, 7e, promotion de 1900 après le service militaire);
- Lauréat du concours d'agrégation de mathématiques en 1903, il prépare ensuite le doctorat ès sciences mathématiques qu'il obtient devant la faculté des sciences de Paris en 1906
- Professeur de mathématiques spéciales au lycée Clémenceau de Nantes (1908-09)
- Marié le 3 septembre 1908 à Sauveterre-de-Béarn (Basses-Pyrénées) avec Suzanne, Marie Carrive, eut quatre enfants Hélène (mariée avec Edgar Lederer), Henri, Denise et Alain.
- Inhumé au cimetière de Bagneux,

Maurice Fréchet et la communauté scientifique

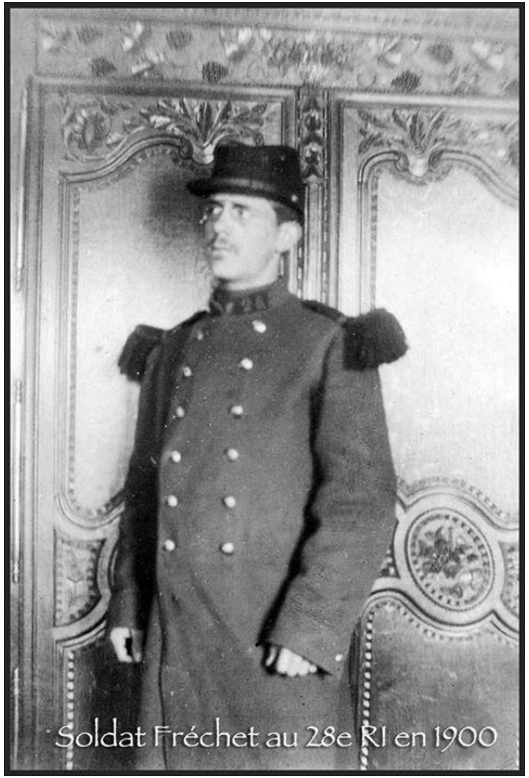
Activités

- Président de la Société mathématique de France (1935)
- Président du colloque international de Genève sur le calcul des probabilités (1937)
- Membre de l'Institut des Actuaires français (1945)
- Président de la Société statistique de Paris (1948)
- Membre de l'Académie internationale de philosophie des sciences (président en 1959-1962)
- Président de l'Internacia Asocio Esperantista (1950)
- Président de la Société française de biométrie (1950-51)
- Membre et en outre fellow de la Société internationale d'économétrie (1951)
- Président de la confédération des sociétés scientifiques françaises et de la Fédération des sociétés françaises de mathématiques (1951)
- Président d'honneur du Colloque international des probabilités (1954).
- Membre de l'Académie des sciences de Paris (1956)

Maurice Fréchet : le soldat

Maurice Fréchet et la 1ère Guerre mondiale

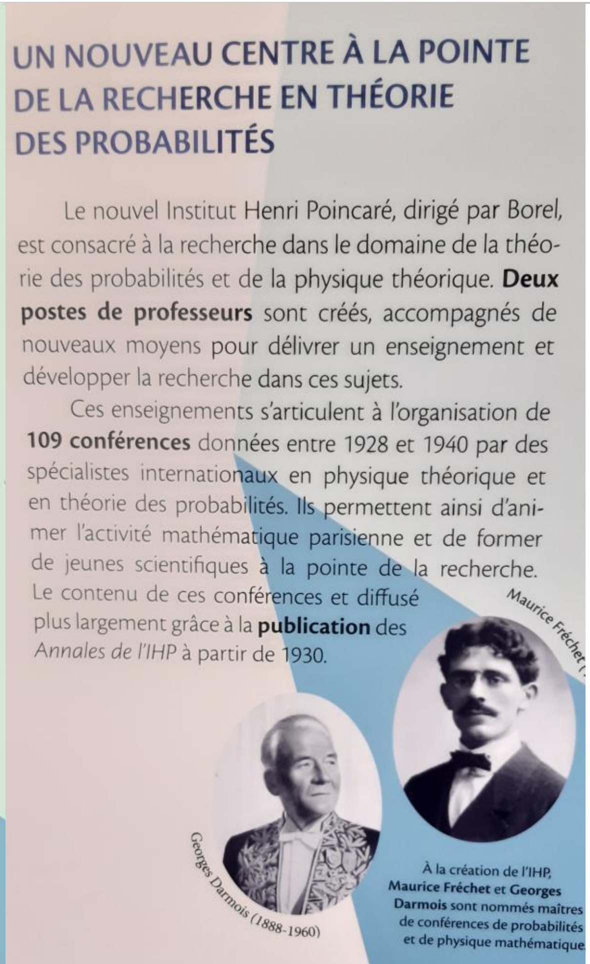
Suzanne , Maurice Fréchet et leurs enfants Hélène et Henri en 1915

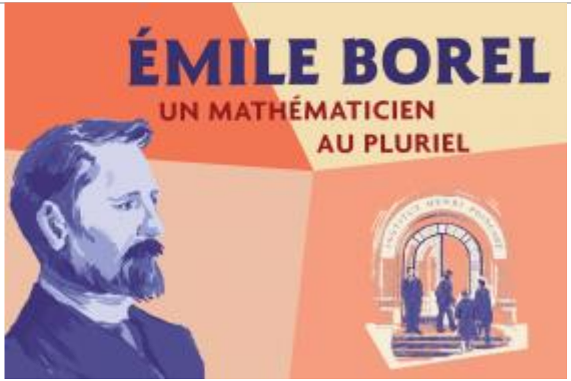


Soldat Fréchet au 28e RI en 1900

- Incorporé le 14 novembre 1899 au 28e RI; en disponibilité le 22 septembre 1900;
- Mobilisé le 4 août 1914 au 68e régiment d'infanterie territoriale; instructeur au 125e RI le 5 octobre 1914; interprète à l'armée britannique le 8 mai 1915; détaché auprès de la 48e division britannique le 27 mai 1915;
- Affecté au 19e escadron du train le 15 octobre 1915, puis à la 168e brigade d'infanterie britannique (25 février 1916), puis à la 4e division de cavalerie britannique (5 août 1916);
- Attaché à la mission aéronautique française à Londres (4 novembre 1917);
- Sous-lieutenant au 13e régiment d'artillerie, maintenu en mission (1er mai 1918);
- Mis à la disposition du service d'Alsace-Lorraine pour une mission à l'Université de Strasbourg (9 janvier 1919);
- Démobilisé le 21 mai 1919.

Maurice Fréchet et l'Institut Henri Poincaré: Exposition 2021 « Emile Borel »





© exposition 2021 « Émile Borel, un mathématicien au pluriel » à l'Institut Henri Poincaré